

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM IV ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1955

SPIS TREŚCI

	Str.
W. Golde: Wielostopniowe wzmacniacze szerokopasmowe z charakterystyką Gaussa	215
K. Bochenek: Niektóre zagadnienia związane ze stosowaniem wektorów Hertza	247
J. Groszkowski: Okres granicznego cyklu drgania nieliniowego	269
W. Nowicki: Odtłumiki	279
R. Kulikowski: Wyznaczanie optymalnych parametrów układów liniowych na podstawie charakterystyk czasowych	323
R. Kulikowski, J. Plebański: Optymalne charakterystyki częstotliwościowe liniowych układów dynamicznych	347
J. Gzylewski: O wpływie zmian przenikalności dielektrycznej na rozkład pola elektrycznego w przepustach kondensatorowych	365
Komunikaty z prac Zakładu Elektroniki IPPT PAN	379

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
В. Гольде: Многостепенные широкополосные усилители с гауссовой характеристикой	215
К. Бохенэк: Некоторые вопросы связанные с применением векторов Герца	247
Я. Грошковский: Период предельного цикла нелинейных колебаний	269
В. Новицки: Усилители, действие которых основано на использовании отрицательного полного сопротивления—Усилители „О”	279
Р. Куликовский: Определение оптимальных параметров линейных систем соответствующих заданным временным характеристикам	323
Р. Куликовский и Г. Плебаньски: Оптимальные частотные характеристики линейных систем	347
Г. Гзылевски: Влияние изменений диэлектрической проницаемости на распределение электрического поля в конденсаторных вводах	365
Сообщения	379

CONTENTS — SOMMAIRE

W. Golde: Wide-band multistage amplifiers with Gaussian characteristics	215
K. Bochenek: Some problems related to the application of Hertzian vectors	247
J. Groszkowski: The limit-cycle period of the nonlinear oscillation	269
W. Nowicki: Répéteurs dont l'action est fondée sur la mise à profit de l'impédance négative („Désaffaiblisseurs“)	279
R. Kulikowski: Determination of the optimum linear network parameters based on the time characteristics	323
R. Kulikowski, J. Plebański: The optimum frequency characteristics of dynamic linear circuits	347
J. Gzylewski: The influence of the dielectric permeability change on the electric field distribution in the condenser bushings	365
Communiqués	379

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM IV • ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

R A D A R E D A K C Y J N A

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. IGNACY MAŁECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN,
PROF. STANISŁAW SZPOR

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

Redaktor Naczelny

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

Z-ca Redaktora Naczelnego

PROF. PAWEŁ NOWACKI

Sekretarz

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

ADRES REDAKCJI:

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,
Zakład Elektroniki PAN, tel. 8.32.04

Państwowe Wydawnictwo Naukowe - Dział Czasopism
Warszawa, Krakowskie Przedmieście 79

Nakład 1215+103 egz.	Do składania 23. II. 1955
Ark. wyd. 14,3 druk. 11 $\frac{1}{2}$	Podpisano do druku 20. VI. 1955
Papier dr. sat. 70 g V kl. 70×100/16	Druk ukończono w czerwcu
Zamówienie 105/101	Cena zł 15.— K-6-684

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA — POZNAŃ, FREDRY 10

621.396.645.21

W. GOLDE

Wielostopniowe wzmacniacze szerokopasmowe z charakterystyką Gaussa

Rękopis dostarczono 15. 6. 1954

Omówiono metodę projektowania i własności szerokopasmowych, wielostopniowych wzmacniaczy asynchronicznych o charakterystyce wzmocnienia zbliżonej do charakterystyki gaussowskiej. Na wstępie wyprowadzono warunki aproksymacji (w sensie taylorowskim) oraz wyznaczono bieguny funkcji aproksymacyjnej.

W dalszym ciągu omówiono różne typy wzmacniaczy dolno- i środkowo-przepustowych, których funkcja wzmocnienia spełnia uprzednio określone warunki aproksymacji. Funkcję wzmocnienia rozpatrywanych typów wzmacniaczy sprowadzono do uniwersalnej postaci biegunowej, pozwalającej traktować je w sposób jednolity. Następnie określono i ujęto tabelarycznie zależności biegunów uniwersalnej funkcji wzmocnienia od parametrów obwodów.

Syntezy obwodów dokonano przez porównanie biegunów uniwersalnej funkcji wzmocnienia omówionych typów wzmacniaczy z biegunami funkcji aproksymacyjnej. Wyniki podano w postaci prostych zależności, wiążących parametry obwodów i parametry biegunów funkcji aproksymacyjnej Gaussa.

W dalszej części zbadano własności impulsowe wzmacniaczy o charakterystyce Gaussa; stwierdzono, że wzmacniacze te odznaczają się prawie monotonicznym przebiegiem odpowiedzi na skok jednostkowy i stałym iloczynem szerokości pasma przez czas narastania odpowiedzi na skok jednostkowy, podobnie jak wzmacniacze synchroniczne.

Na koniec poddano porównaniu własności wzmacniaczy asynchronicznych i synchronicznych o charakterystyce Gaussa. Wykazano, że wzmacniacze asynchroniczne odznaczają się większym współczynnikiem dobroci $k_s \Delta f$ oraz lepiej aproksymują charakterystykę Gaussa niż wzmacniacze synchroniczne. Pod względem własności impulsowych wzmacniacze te dają wierniejsze odtworzenie sygnałów wejściowych niż wzmacniacze synchroniczne.

1. UWAGI OGÓLNE

Wzmacniacze szerokopasmowe, o charakterystyce wzmocnienia zbliżonej do gaussowskiej, są często stosowane w urządzeniach pomiarowych, impulsowych itp. ze względu na swe korzystne właściwości impul-

sowe¹ [7]. W dotychczasowej praktyce w urządzeniach tego typu najczęściej używane były wzmacniacze synchroniczne² typu RC (dolnoprzepustowe) lub równoważne im RLC (środkowoprzepustowe), które — jak wiadomo — przy znacznej liczbie stopni wzmocnienia dają charakterystykę wzmocnienia zbliżoną do gaussowskiej [7].

Poniżej rozpatrzone będą asynchroniczne³ wzmacniacze wielostopniowe, których charakterystyka wzmocnienia aproksymuje charakterystykę Gaussa; będzie wykazane, że wzmacniacze takie odznaczają się lepszymi właściwościami niż wzmacniacze synchroniczne.

2. FUNKCJA GAUSSA I JEJ APROKSYMACJA TAYLOROWSKA

Funkcja Gaussa określona jest równaniem

$$F(x) = e^{-\delta^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\delta}{1!} x^2 + \frac{(2\delta)^2}{2!} x^4 + \dots + \frac{(2\delta)^n}{n!} x^{2n} + \dots}}, \quad (1)$$

gdzie δ określa w neperach zmniejszanie się wartości funkcji $F(x)$ dla $|x|=1$ w stosunku do jej wartości dla $x=0$.

Funkcja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots + a_n x^{2n}}} \quad (2)$$

będzie aproksymowała w sensie taylorowskim funkcję $F(x)$ w otoczeniu punktu $x=0$, jeśli spełnione będą warunki:

$$a_1 = \frac{2\delta}{1!}; \quad a_2 = \frac{(2\delta)^2}{2!}; \quad \dots a_n = \frac{(2\delta)^n}{n!}; \quad (3)$$

przy czym aproksymacja ta będzie tym dokładniejsza, im wyższy będzie rząd wielomianu n . W tych warunkach funkcja (2) przybierze postać

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\delta}{1!} x^2 + \frac{(2\delta)^2}{2!} x^4 + \dots + \frac{(2\delta)^n}{n!} x^{2n}}}. \quad (4)$$

¹ Wzmacniacze tego typu odznaczają się na przykład zbliżoną do monotonicznej odpowiedzi na skok jednostkowy oraz zbliżoną do liniowej charakterystyką fazy [7] (por. 5).

² O jednakowych obwodach w poszczególnych stopniach wzmacniacza.

³ O niejednakowych obwodach w poszczególnych stopniach wzmocnienia, różniących się na przykład częstotliwością rezonansową, tłumieniem obwodów, współczynnikiem sprzężenia obwodów, wielkością sprzężenia zwrotnego itp.

Zakładając, że na krańcach przedziału $[-1, +1]$ wartość funkcji (4) maleje o 3 dB w stosunku do jej wartości w środku przedziału⁴, łatwo wyznaczyć wielkość δ z zależności

$$1 + \frac{2\delta}{1!} + \frac{(2\delta)^2}{2!} + \dots + \frac{(2\delta)^n}{n!} = 2, \quad (5)$$

co prowadzi do wyników podanych w tabelicy 1 dla $n=2 \div 6$ oraz dla idealnej funkcji Gaussa ($n=\infty$).

Tabela 1

n	2	3	4	5	6	∞
δ	0,366	0,350	0,348	0,347	0,347	0,3448

Bieguny funkcji (4) łatwo wyznaczyć z zależności

$$1 + \frac{2\delta}{1!} \hat{x}_m^2 + \frac{(2\delta)^2}{2!} \hat{x}_m^4 + \dots + \frac{(2\delta)^n}{n!} \hat{x}_m^{2n} = 0. \quad (6)$$

Oznaczając przez

$$\hat{x}_m^2 = -a_m + jb_m = r'_m \cdot e^{j\Theta'_m} \quad (7)$$

pierwiastki zespolone tego równania oraz przez

$$\hat{x}_m = \beta_m + ja_m = r_m \cdot e^{j\Theta_m} \quad (8)$$

szukane bieguny funkcji (4), otrzymujemy

$$\hat{x}_m = \sqrt{r'_m \cdot e^{j\Theta'_m}} = r_m \cdot e^{j\Theta_m}, \quad (9)$$

skąd

$$\left. \begin{aligned} r_m &= \sqrt{r'_m} = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}, \\ \Theta_m &= \frac{1}{2} \Theta'_m = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{b_m}{a_m} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctg \frac{b_m}{a_m}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ponadto zgodnie z (8) mamy

$$\left. \begin{aligned} a_m &= r_m \cdot \sin \Theta_m, \\ \beta_m &= r_m \cdot \cos \Theta_m, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

⁴ Założenie to odpowiada przyjętemu ogólnie określeniu szerokości pasma przy spadku wzmocnienia o 3 dB.

Podstawiając do równania (6) wartości δ z tablicy 1 rozwiązujemy je, a uwzględniając (10) i (11) otrzymujemy parametry biegunów funkcji (4) $\alpha_m, \beta_m, r_m, \theta_m$, które podano w tablicy 2 dla $n=2 \div 6$.

Tablica 2

Parametry biegunów funkcji Gaussa

$n=2$	$\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1,285$ $\beta_1 = -\beta_2 \approx 0,532$	$\theta_1 = \pi - \theta_2 \approx 67,5^\circ$ $r_1 = r_2 \approx 1,385$
$n=3$	$\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1,373$ $\alpha_3 \approx 1,512$ $\beta_1 = -\beta_2 \approx 0,941$ $\beta_3 = 0$	$\theta_1 = \pi - \theta_2 \approx 55,6^\circ$ $\theta_3 \approx 90^\circ$ $r_1 = r_2 \approx 1,664$ $r_3 \approx 1,512$
$n=4$	$\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1,417$ $\alpha_3 = \alpha_4 \approx 1,625$ $\beta_1 = -\beta_2 \approx 1,27$ $\beta_3 = -\beta_4 \approx 0,397$	$\theta_1 = \pi - \theta_2 \approx 48,1^\circ$ $\theta_3 = \pi - \theta_4 \approx 76,3^\circ$ $r_1 = r_2 \approx 1,905$ $r_3 = r_4 \approx 1,67$
$n=5$	$\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1,443$ $\alpha_3 = \alpha_4 \approx 1,695$ $\alpha_5 \approx 1,765$ $\beta_1 = -\beta_2 \approx 1,555$ $\beta_3 = -\beta_4 \approx 0,712$ $\beta_5 = 0$	$\theta_1 = \pi - \theta_2 \approx 42,9^\circ$ $\theta_3 = \pi - \theta_4 \approx 67,2^\circ$ $\theta_5 = 90^\circ$ $r_1 = r_2 \approx 2,13$ $r_3 = r_4 \approx 1,85$ $r_5 \approx 1,765$
$n=6$	$\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1,47$ $\alpha_3 = \alpha_4 \approx 1,67$ $\alpha_5 = \alpha_6 \approx 1,93$ $\beta_1 = -\beta_2 \approx 1,81$ $\beta_3 = -\beta_4 \approx 0,96$ $\beta_5 = -\beta_6 \approx 0,456$	$\theta_1 = \pi - \theta_2 \approx 39,1^\circ$ $\theta_3 = \pi - \theta_4 \approx 60,1^\circ$ $\theta_5 = \pi - \theta_6 \approx 76,8^\circ$ $r_1 = r_2 \approx 2,33$ $r_3 = r_4 \approx 1,93$ $r_5 = r_6 \approx 1,985$

3. WYZNACZENIE APROKSYMACYJNEJ FUNKCJI WZMOCNIENIA

Jak podano w rozdziale 2, funkcja $f(x)$, aproksymująca w sensie taylorowskim funkcję Gaussa (1) w otoczeniu punktu $x=0$, powinna mieć ogólną postać (2). Ponieważ funkcja ta reprezentuje moduł funkcji wzmacnienia n -stopniowego wzmacniacza, zatem sama funkcja wzmacnienia musi należeć do klasy funkcji zmiennej zespolonej typu

$$f(p) = \frac{A}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{A}{\prod_{m=1}^n (p - \hat{p}_m)}, \quad (12)$$

gdzie

$A, b_0 \dots b_{n-1}$ są stałymi rzeczywistymi, podczas gdy

$$p = jx \quad (13)$$

oraz

$$\hat{p}_m = -a_m + j\beta_m \quad (14)$$

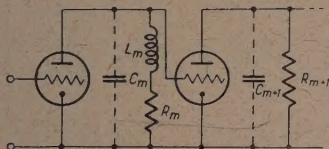
jest biegunem funkcji wzmocnienia (12).

Funkcję wzmocnienia typu (12) można zrealizować za pomocą wielu rodzajów obwodów międzystopniowych; spośród nich wybrane i rozpatrzone zostaną najczęściej spotykane, najprostsze w realizacji obwody dolno- i środkowoprzepustowe.

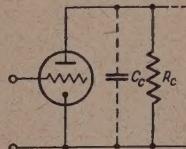
3. 1. WZMACNIACZE DOLNOPRZEPUSTOWE

3. 1. 1. Wzmacniacz dolnoprzepustowy wielorezonansowy [6]

Wzmacniacz dolnoprzepustowy wielorezonansowy składa się z par stopni przedstawionych schematycznie na rys. 1 oraz w przypadku nieparzystej liczby stopni z tak zwanego stopnia centralnego, jak to pokazano na rys. 2.



Rys. 1. Para stopni wielorezonansowych.



Rys. 2. Stopień centralny.

Zakładając dla uproszczenia równość nachylenia charakterystyki lamp i pojemności szkodliwych w poszczególnych stopniach wzmacniacza i oznaczając je jako S i C oraz przyjmując, że w poszczególnych stopniach wzmocnienia użyte są pentody⁵, funkcję wzmocnienia pary stopni m i $m+1$ wyrazimy zależnością [5]

$$\hat{k}_{m,m+1} = \frac{S^2 R_m R_{m+1} \left(1 + j\omega \frac{L_m}{R_m} \right)}{(1 + j\omega C R_m - \omega^2 L_m C) (1 + j\omega C R_{m+1})}, \quad (15)$$

stopnia centralnego zaś zależnością

$$\hat{k}_c = - \frac{S R_c}{1 + j\omega C R_c}. \quad (16)$$

⁵ Założenia te będą zachowane w dalszym ciągu rozważań.

Jeśli założymy

$$\frac{L_m}{R_m} = R_{m+1} \cdot C, \quad (17)$$

równanie (15) przyjmie postać

$$\hat{k}_{m,m+1} = \frac{S^2 R_m \cdot R_{m+1}}{1 + j\omega C R_m - \omega^2 L_m C}. \quad (18)$$

Podstawiając do (16) i (18) zmienną

$$p = jx = j \frac{\omega}{\omega_g}, \quad (19)$$

gdzie $f_g = \frac{\omega_g}{2\pi}$ jest górną częstotliwością graniczną wzmacniacza, określonej przy spadku wzmocnienia o 3 dB, otrzymujemy

$$\hat{k}_{m,m+1} = \frac{S^2 R_m R_{m+1} \cdot \hat{p}_m \cdot \hat{p}_{m+1}}{(p - \hat{p}_m)(p - \hat{p}_{m+1})}, \quad (20)$$

$$\hat{k}_c = \frac{S \cdot R_c \cdot p_c}{(p - p_c)}, \quad (21)$$

przy czym zgodnie z (14), (16) i (18):

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_m &= -a_m + j\beta_m = -\frac{R_m}{2\omega_g L_m} + j \frac{1}{\omega_g} \sqrt{\frac{1}{L_m C} - \frac{R_m^2}{4L_m^2}}, \\ \hat{p}_{m+1} &= -a_m - j\beta_m, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$p_c = -a_c = -\frac{1}{\omega_g C R_c}. \quad (23)$$

Funkcja wzmocnienia n -stopniowego wzmacniacza będzie zatem

$$\hat{k} = S^n \cdot \prod_{m=1}^n \frac{R_m \cdot \hat{p}_m}{(p - \hat{p}_m)}. \quad (24)$$

Podstawiając w równaniu (24)

$$k_0 = (-1)^n \cdot S^n \cdot \prod_{m=1}^n R_m = \left(\frac{S}{\omega_g \cdot C} \right)^n \cdot \prod_{m=1}^n \frac{1}{\hat{p}_m}, \quad (25)$$

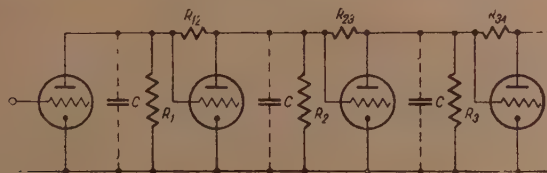
gdzie k_0 jest wzmocnieniem dla $f=0$, otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\hat{k}}{k_0} = (-1)^n \prod_{m=1}^n \left(\frac{\hat{p}_m}{p - \hat{p}_m} \right). \quad (26)$$

Wyzaczyliśmy w ten sposób funkcję wzmocnienia typu (12), której moduł spełnia równanie (2).

3. 1. 2. Wzmacniacz dolnoprzepustowy z torem napięciowego sprzężenia równoległego

Wzmacniacz dolnoprzepustowy z torem napięciowego sprzężenia równoległego przedstawiono schematycznie na rys. 3. Funkcję wzmocnienia n -stopniowego wzmacniacza tego typu określa zespół równań [7].



Rys. 3. Tor napięciowego sprzężenia równoległego.

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y}_1 \cdot \hat{k}_{11} - G_{12} \cdot \hat{k}_{12} &= -S'_1, \\ S'_2 \cdot \hat{k}_{11} + \hat{Y}_2 \cdot \hat{k}_{12} - G_{23} \cdot \hat{k}_{13} &= 0, \\ S'_3 \cdot \hat{k}_{12} + \hat{Y}_3 \cdot \hat{k}_{13} - G_{34} \cdot \hat{k}_{14} &= 0, \\ \dots &\dots \\ S'_n \cdot \hat{k}_{1n-1} + \hat{Y}_n \cdot \hat{k}_{1n} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{Y}_m &= G_m + G_{m-1,m} + G_{m,m+1} + j\omega C = G_m + G_{m-1,m} + G_{m,m+1} + p\omega_g C, \\ S'_m &= S - G_{m-1,m} \quad \text{— efektywne nachylenie lampy } m\text{-tego stopnia wzmacniacza,} \\ G_{m-1,m} &= \frac{1}{R_{m-1,m}}, \\ G_m &= \frac{1}{R_m}, \end{aligned} \quad (28)$$

\hat{k}_{1m} — funkcja wzmocnienia pierwszych m stopni wzmacniacza,

$$p = jx = j \frac{\omega}{\omega_g}, \quad (19)$$

Wyznaczając z (27) funkcję wzmocnienia \hat{k}_{1n} otrzymujemy równanie

$$\hat{k} = \hat{k}_{1n} = \frac{(-1)^n \prod_{m=1}^n S'_m}{A}, \quad (29)$$

w którym

$$\Delta = \begin{vmatrix} \hat{Y}_1; & -G_{12}; & 0; & 0; & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \\ S'_2; & \hat{Y}_2; & -G_{23}; & 0; & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0; & S'_3; & \hat{Y}_3; & -G_{34}; & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0; & S'_{n-1}; & \hat{Y}_{n-1}; & G_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0; & 0; & S'_n; & \hat{Y}_n \end{vmatrix} \quad (30)$$

Podstawiając wielkości \hat{Y}_m z (28) do (30) oraz rozwiązując (29) i (30) otrzymujemy ogólną postać funkcji wzmocnienia

$$\hat{k} = \frac{(-1)^n \cdot \prod_{m=1}^n \frac{S'_m}{\omega_g C}}{p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + b_0} = (-1)^n \prod_{m=1}^n \left(\frac{\frac{S'_m}{\omega_g C}}{p - \hat{p}_m} \right), \quad (31)$$

gdzie $b_0 \dots b_{n-1}$ są stałymi rzeczywistymi zależnymi od parametrów obwodów.

Oznaczając analogicznie jak w (25)

$$k_0 = \prod_{m=1}^n \left(\frac{\frac{S'_m}{\omega_g C}}{\hat{p}_m} \right), \quad (32)$$

gdzie k_0 jest wzmocnieniem dla $f=0$, otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\hat{k}}{k_0} = (-1)^n \prod_{m=1}^n \left(\frac{\hat{p}_m}{p - \hat{p}_m} \right), \quad (26)$$

podobnie jak we wzorze (12).

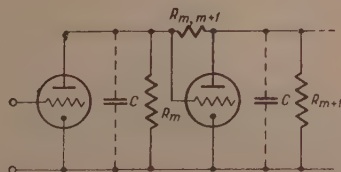
Wzmacniacze omówionego typu są rzadko używane ze względu na trudności praktyczne, występujące przy ich projektowaniu i realizacji [7]. Szczególnym i często spotykanym przypadkiem ($n=2$) takiego wzmacniacza jest wzmacniacz złożony z dwójek, omówiony w 3. 1. 3; wzmacniacz ten jest prostszy w konstrukcji i łatwiejszy do zaprojektowania.

3. 1. 3. Wzmacniacz dolnoprzepustowy

złożony z dwójek z napięciowym sprzężeniem równoległym

Wzmacniacz dolnoprzepustowy, złożony z dwójek z napięciowym sprzężeniem równoległym, jest szczególnym przypadkiem wzmacniacza opisa-

nego w 3. 1. 2 i składa się z par stopni (dwójek) przedstawionych schematycznie na rys. 4.



Rys. 4. Dwójka z napięciowym sprzężeniem równoległym.

Podstawiając do równań (27) $n=2$ oraz uwzględniając oznaczenia podane w (28) otrzymujemy dla pary stopnia m i $m+1$

$$\hat{k}_{m,m+1} = \frac{S(S - G_{m,m+1})}{(G_m + G_{m,m+1} + j\omega C)(G_{m+1} + G_{m,m+1} + j\omega C) + G_{m,m+1}(S - G_{m,m+1})} =$$

$$= \frac{S(S - G_{m,m+1})}{\omega_g^2 C} \cdot \frac{1}{(p - \hat{p}_m)(p - \hat{p}_{m+1})}, \quad (33)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_m &= -a_m + j\beta_m = -\frac{1}{2\omega_g C} (G_m + 2G_{m,m+1} + G_{m+1}) + \\ &+ j \frac{1}{\omega_g C} \sqrt{(S - G_{m,m+1}) G_{m,m+1} - \left(\frac{G_m - G_{m+1}}{2}\right)^2}, \\ \hat{p}_{m+1} &= -a_m - j\beta_m, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Funkcja wzmocnienia n -stopniowego wzmacniacza złożonego z $n/2$ dwójek będzie

$$\hat{k} = \left(\frac{S_e}{\omega_g C}\right)^n \cdot \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{p - \hat{p}_m}\right), \quad (35)$$

gdzie

$$S_e = S \sqrt{\left(1 - \frac{G_{12}}{S}\right) \left(1 - \frac{G_{34}}{S}\right) \dots \left(1 - \frac{G_{n-1,n}}{S}\right)}. \quad (36)$$

S_e jest tu efektywnym średnim nachyleniem lampy.

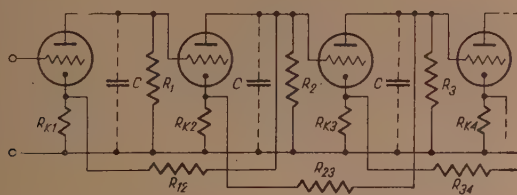
Podstawiając do (35) analogicznie jak w (25)

$$k_0 = \left(\frac{S_e}{\omega_g C}\right)^n \cdot \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{\hat{p}_m}\right), \quad (37)$$

* Najmniejsza wartość $G_{m, m+1}$ odpowiada zgodnie z (36) największej wartości S_* , czyli największemu wzmocnieniu.

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{Y}_m &= G_m + \frac{1}{R_{m-1,m} + R_{k,m-1}} + j\omega C = G'_m + p\omega_g C, \\ \hat{S}'_m &= \frac{1}{1 + SR_{k,m}} \quad \text{— efektywne nachylenie lampy } m\text{-tego stopnia wzmacniacza} \\ \hat{k}_{1m} &\quad \text{— funkcja wzmocnienia pierwszych } m \text{ stopni wzmacniacza,} \\ G_m &= \frac{1}{R_m}, \\ b_m &= \frac{R_{k,m}}{R_{k,m} + R_{m,m+1}} \quad \text{— współczynnik sprzężenia zwrotnego } m\text{-tego stopnia wzmacniacza.} \end{aligned} \quad (42)$$



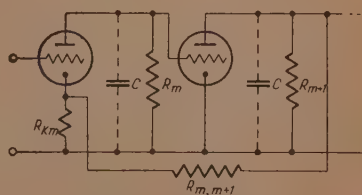
Rys. 5. Tor napięciowego sprzężenia szeregowego.

Zespół równań (41) jest analogiczny do (27) i rozwiązanie jego przebiega podobnie jak w 3.1.2, prowadząc ostatecznie do takiej samej postaci funkcji wzmocnienia, jak w równaniach (31), (32) i (26). Jako szczególny, spotykany w praktyce przypadek ⁷ rozpatrzony będzie w 3.1.5. wzmacniacz złożony z dwójek z napięciowym sprzężeniem szeregowym.

3.1.5. Wzmacniacz dolnoprzepustowy złożony z dwójek z napięciowym sprzężeniem szeregowym

Wzmacniacz dolnoprzepustowy, złożony z dwójek z napięciowym sprzężeniem szeregowym, jest szczególnym przypadkiem wzmacniacza opisanego w 3.1.4. dla $n=2$ i składa się z par stopni (dwójek) przedstawionych schematycznie na rys. 6.

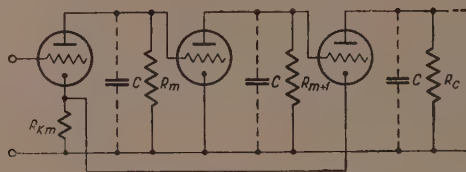
W przypadku nieparzystej liczby stopni wzmocnienia jedną z dwójek



Rys. 6. Dwójka z napięciowym sprzężeniem szeregowym.

⁷ Porównaj uwagi końcowe w 3.1.2.

można zastąpić tak zwaną trójką centralną ze sprzężeniem prądowym, przedstawioną schematycznie na rys. 7.



Rys. 7. Trójką centralna ze sprzężeniem prądowym.

Podstawiając do równań (41) $n=2$ oraz uwzględniając podane w (42) oznaczenia, otrzymujemy dla pary stopni m i $m+1$ (rys. 6)

$$\hat{k}_{m,m+1} = \frac{S \cdot S'_m}{b_m \cdot S \cdot S'_m + (G_m + j\omega C)(G'_{m+1} + j\omega C)} = \frac{S \cdot S'_m}{(\omega_g C)^2} \cdot \frac{1}{(p - \hat{p}_m)(p - \hat{p}_{m+1})}, \quad (43)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_m &= -a_m + j\beta_m = -\frac{1}{2\omega_g C} (G_m + G'_{m+1}) + \\ &+ j \frac{1}{\omega_g C} \sqrt{b_m S \cdot S'_m - \left(\frac{G_m - G'_{m+1}}{2} \right)^2}, \\ p_{m+1} &= -a_m - j\beta_m. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Dla trójki centralnej (rys. 7), uwzględniając oznaczenia podane w (42), funkcję wzmocnienia wyrazimy zależnością (por. dodatek)

$$\hat{k}_{m,m+1,c} = -\frac{S'_m \cdot S \cdot S_c}{[b'_m S S'_m + (G_m + j\omega C)(G'_{m+1} + j\omega C)](G_c + j\omega C)} = -\frac{S'_m S S_c}{(\omega_g C)^3} \cdot \frac{1}{(p - \hat{p}_m)(p - \hat{p}_{m+1})(p - \hat{p}_c)}, \quad (45)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_m &= -a_m + j\beta_m = -\frac{1}{2\omega_g C} (G_m + G'_{m+1}) + j \frac{1}{\omega_g C} \sqrt{b'_m S S'_m - \left(\frac{G_m - G'_{m+1}}{2} \right)^2} \\ \hat{p}_{m+1} &= -a_m - j\beta_m, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$p_c = -a_c = -\frac{1}{\omega_g C R_c}, \quad (47)$$

$$b'_m = S'_c \cdot R_{k,m} = \frac{S}{1 + SR_{k,m}} \cdot R_{k,m}.$$

(48)

Funkcja wzmocnienia n -stopniowego wzmacniacza będzie więc

$$\hat{k} = \left(\frac{-S_e}{\omega_g C} \right)^n \cdot \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{p - \hat{p}_m} \right),$$

(49)

gdzie

$$S_e = S^n \sqrt{\frac{1}{1 + SR_{k_1}} \cdot \frac{1}{1 + SR_{k_3}} \cdots}$$

(50)

S_e jest efektywnym średnim nachyleniem lampy.

Podstawiając do (49), podobnie jak w (25)

$$k_0 = \left(\frac{S_e}{\omega_g C} \right)^n \cdot \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{\hat{p}_m} \right),$$

(37)

gdzie k_0 jest wzmocnieniem dla $f=0$, otrzymujemy ostatecznie:

$$\frac{\hat{k}}{k_0} = (-1)^n \prod_{m=1}^n \left(\frac{\hat{p}_m}{p - \hat{p}_m} \right)$$

(26)

jak we wzorze (12).

Na koniec analizując równania (44) i (46) łatwo zauważyć, że najmniejsza wartość b_m lub b'_m przy określonej wielkości β_m ⁸ zachodzi dla warunku

$$G_m = G'_{m+1}.$$

(51)

Zakładając, że warunek (51) jest spełniony i że

to znaczy

oraz

$$\left. \begin{aligned} R_{k,m} + R_{m,m+1} &\gg \frac{1}{G_{m+1}}, \\ G'_{m+1} &\approx G_{m+1}, \\ R_{k,m} &\ll \frac{1}{S}, \end{aligned} \right\}$$

(52)

⁸ Najmniejsza wartość b_m lub b'_m odpowiada najmniejszym $R_{k,m}$, a zatem największej wartości S_e (por. równanie 50) i wzmocnienia.

rownania (44) lub (46) uprościmy dla dwójek do postaci

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_m &= -a_m + j\beta_m = -\frac{1}{\omega_g C R_m} + j \frac{S}{\omega_g C} \sqrt{b_m}, \\ \hat{p}_{m+1} &= -a_m - j\beta_m, \\ b_m &= \frac{R_{k,m}}{R_{k,m} + R_{m,m+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

natomiast dla trójki centralnej

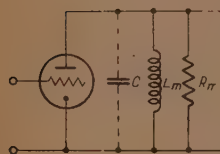
$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_m &= -a_m + j\beta_m = -\frac{1}{\omega_g C R_m} + j \frac{1}{\omega_g C} S \sqrt{S R_{k,m}}, \\ \hat{p}_{m+1} &= -a_m - j\beta_m, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\hat{p}_c = -a_c = -\frac{1}{\omega_g C R_c} \quad (55)$$

3. 2. WZMACNIACZE ŚRODKOWOPRZEPUSTOWE

Wszystkie typy wzmacniaczy dolnoprzepustowych, opisanych w 3. 1. można przekształcić znaną metodą transformacji częstotliwości [2] na wzmacniacze środkowoprzepustowe, przy czym kształt funkcji wzmocnienia zostanie zachowany; wzmacniacze tego typu — za wyjątkiem opisanych w 3. 1. 3 i 3. 1. 5 — nie są jednak stosowane w praktyce ze względu na skomplikowanie obwodów. Obok nich warunki określone w (12) spełniają używane często wzmacniacze wielorezonansowe z pojedynczym obwodem rezonansowym oraz wzmacniacze z podwójnymi obwodami sprzężonymi indukcyjnie; wzmacniacze te będą omówione niżej.

3. 2. 1. Wzmacniacz środkowoprzepustowy wielorezonansowy



Rys. 8. Stopień wzmacniacza wielorezonansowego środkowoprzepustowego.

Wzmacniacz środkowoprzepustowy wielorezonansowy składa się ze stopni przedstawionych schematycznie na rys. 8.

Funkcja wzmocnienia m -tego stopnia wzmacniacza, będąca przypadkiem symetrii geometrycznej⁹, wyraża się zależnością [7]

$$\hat{k}_m = - \frac{S R_m}{1 + j Q_m \left(\frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega} \right)}, \quad (56)$$

⁹ Dla pary częstotliwości f_1 i f_2 , gdy $f_1 \cdot f_2 = f_m^2$ moduł funkcji jest jednakowy a kąty fazowe równe, lecz o przeciwnym znaku.

gdzie

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{L_m C}}; \quad Q_m = \omega_m C R_m = \frac{\omega_m}{L_m R_m}. \quad (57)$$

Jeżeli założyć, że funkcja wzmocnienia n -stopniowego wzmacniacza powinna być geometrycznie symetryczna względem częstotliwości średniej pasma f_c , to poszczególne stopnie muszą być zgrupowane w pary, przy czym dla pary stopni m i $m+1$ powinny zachodzić zależności

$$\left. \begin{aligned} f_m \cdot f_{m+1} &= f_c^2, \\ Q_m &= Q_{m+1}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

W przypadku nieparzystej liczby stopni musi występować ponadto tzw. stopień centralny, dostrojony do średniej częstotliwości pasma f_c . Przy uwzględnieniu warunku (58) funkcja wzmocnienia pary stopni wzmacniacza m i $m+1$ wyrazi się [7] jako

$$\begin{aligned} \hat{k}_{m,m+1} &= \left(\frac{S}{\Delta \omega C} \right)^2 \frac{1}{b^2 + p \frac{\gamma_m + \frac{1}{\gamma_m}}{Q_m} \cdot \frac{\omega_c}{\Delta \omega} + \left[\frac{1}{Q_m^2} + \left(\gamma_m - \frac{1}{\gamma_m} \right)^2 \right] \left(\frac{\omega_c}{\Delta \omega} \right)^2} = \\ &= \left(\frac{S}{\Delta \omega C} \right)^2 \frac{1}{(p - \hat{p}_m)(p - \hat{p}_{m+1})}, \end{aligned} \quad (59)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \gamma_m &= \frac{\omega_m}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_{m+1}}, \\ p &= jx = j \frac{\frac{\omega}{\Delta \omega} - \frac{\omega_c}{\Delta \omega}}{\frac{\omega_c}{\Delta \omega}}, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

zaś $\Delta f = \frac{\Delta \omega}{2\pi}$ jest szerokością pasma wzmacniacza pomiędzy górną i dolną częstotliwością graniczną przy spadku wzmocnienia na krańcach pasma o 3 dB oraz

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_m &= -\alpha_m + j\beta_m = -\frac{1}{2} \frac{\gamma_m + \frac{1}{\gamma_m}}{Q_m} \frac{\omega_c}{\Delta \omega} + j \frac{\omega_c}{\Delta \omega} \left(\gamma_m - \frac{1}{\gamma_m} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_m^2}}, \\ \hat{p}_{m+1} &= -\alpha_m - j\beta_m. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Funkcja wzmocnienia stopnia centralnego wyrazi się jako

$$\hat{k}_c = - \frac{S}{\Delta \omega C} \cdot \frac{1}{(p - \hat{p}_c)}, \quad (62)$$

gdzie

$$\hat{p}_c = -a_c = - \frac{1}{Q_c} \cdot \frac{\omega_c}{\Delta \omega}. \quad (63)$$

Funkcja wzmocnienia n -stopniowego wzmacniacza będzie zatem

$$\hat{k} = (-1)^n \left(\frac{S}{\Delta \omega C} \right)^n \cdot \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{p - \hat{p}_m} \right). \quad (64)$$

Podstawiając do wzoru (64) podobnie jak we wzorze (25)

$$k_0 = \left(\frac{S}{\Delta \omega C} \right)^n \cdot \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{p_m} \right), \quad (65)$$

gdzie k_0 jest wzmocnieniem dla $f = f_c$, otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\hat{k}}{k_0} = (-1)^n \prod_{m=1}^n \left(\frac{\hat{p}_m}{p - \hat{p}_m} \right), \quad (26)$$

czyli postać taką samą jak we wzorze (12).

Jeśli względna szerokość pasma wzmacniacza $\frac{\Delta \omega}{\omega_c}$ jest mała (na przykład $\frac{\Delta \omega}{\omega_c} \leq 0,1$) równania (60) i (61) można uprościć, ponieważ ¹⁰

$$\left. \begin{aligned} \gamma_m &\approx 1; Q_m \gg 1; \\ \gamma_m \frac{1}{\gamma_m} &\approx 2 \frac{\omega_m - \omega_c}{\omega_c}; \\ p = jx &\approx j \frac{\omega - \omega_c}{\frac{\Delta \omega}{2}}; \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

wobec tego równania (61) przyjmą postać

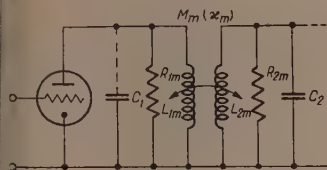
$$\hat{p}_m = -a_m + j\beta_m \approx - \frac{1}{Q_m} \cdot \frac{\omega_c}{\Delta \omega} + j \frac{\omega_m - \omega_c}{\frac{\Delta \omega}{2}}, \quad (67)$$

$$\hat{p}_{m+1} = -a_m - j\beta_m.$$

¹⁰ Symetria geometryczna przechodzi wtedy w arytmetyczną, to znaczy dla pary częstotliwości f_1 i f_2 , gdy $f_1 + f_2 = 2f_c$, moduł funkcji jest jednakowy, a kąty fazowe równe, lecz o przeciwnym znaku.

3.2.2. Wzmacniacz środkowoprzepustowy z podwójnymi obwodami sprzężonymi indukcyjnie

Wzmacniacz środkowoprzepustowy z podwójnymi obwodami sprzężonymi indukcyjnie składa się ze stopni przedstawionych schematycznie na rys. 9. Przy oznaczeniach:



Rys. 9. Stopień wzmacniacza z podwójnym obwodem sprzężonym indukcyjnie.

M_m — indukcja wzajemna obwodów m -tego stopnia wzmacniacza,
 $\kappa_m = \frac{M_m}{\sqrt{L_{1m} \cdot L_{2m}}}$ — współczynnik sprzężenia obwodów m -tego stopnia wzmacniacza

oraz w założeniu

$$L_{1m}C_1 = L_{2m}C_2 = \frac{1}{\omega_c^2} \quad (68)$$

funkcja wzmocnienia m -tego stopnia wzmacniacza przedstawia przypadek symetrii geometrycznej i wyraża się w przybliżeniu¹¹ jako [1]

$$k_m \approx -j \frac{S}{\Delta\omega \sqrt{C_1 C_2}} \cdot \frac{\kappa_m \cdot \frac{\omega_c}{\Delta\omega}}{p^2 + p \frac{\omega_c}{\Delta\omega} \frac{\varepsilon_m + 1}{\varepsilon_m} \frac{1}{Q_m} + \left(\frac{\omega_c}{\Delta\omega}\right)^2 \left(\kappa_m^2 + \frac{1}{\varepsilon_m Q_m}\right)} =$$

$$= -j \frac{S}{\Delta\omega \sqrt{C_1 C_2}} \cdot \frac{\kappa_m \frac{\omega_c}{\Delta\omega}}{(p - \hat{p}_{1m})(p - \hat{p}_{2m})}, \quad (69)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} p &= jx = j \frac{\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}}{\frac{\Delta\omega}{\omega_c}}, \\ \varepsilon_m &= \frac{Q_{1m}}{Q_{2m}} = \frac{Q_{1m}}{Q_m}, \\ Q_{1m} &= \omega_c R_{1m} C_1, \quad Q_{2m} = \omega_c R_{2m} C_2 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

¹¹ Przybliżenie to jest spełnione z dużą dokładnością dla $\frac{\Delta\omega}{\omega_c} \ll 0,4$ [7].

oraz

$$\begin{aligned}\hat{p}_m &= -a_m + j\beta_m = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_m + 1}{\varepsilon_m} \frac{1}{Q_m} \frac{\omega_c}{\Delta\omega} + j \frac{\omega_c}{\Delta\omega} \sqrt{\varepsilon_m^2 - \frac{1}{4Q_m^2} \left(\frac{\varepsilon_m - 1}{\varepsilon_m} \right)^2}, \\ \hat{p}_{m+1} &= -a_m - j\beta_m.\end{aligned}\quad (71)$$

Funkcja wzmocnienia n -stopniowego wzmacniacza będzie więc

$$\hat{k} = \left(\frac{-jS}{\Delta\omega \sqrt{C_1 C_2}} \right)^n \cdot \frac{\prod_{m=1}^n \varepsilon_m \frac{\omega_c}{\Delta\omega}}{\prod_{m=1}^{2n} (p - \hat{p}_m)} \quad (72)$$

Oznaczając

$$\hat{k}_0 = \left(\frac{-jS}{\Delta\omega \sqrt{C_1 C_2}} \right)^n \cdot \frac{\prod_{m=1}^n \varepsilon_m \frac{\omega_c}{\Delta\omega}}{\prod_{m=1}^{2n} \hat{p}_m}, \quad (73)$$

gdzie k_0 jest wzmocnieniem dla $f=f_c$, otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\hat{k}}{\hat{k}_0} = (-1)^{2n} \prod_{m=1}^{2n} \left(\frac{\hat{p}_m}{p - \hat{p}_m} \right). \quad (74)$$

Otrzymana postać funkcji wzmocnienia jest identyczna jak we wzorze (12) i (26), z tą różnicą, że liczba biegunów jest tu dwukrotnie większa¹².

Podobnie jak dla wzmacniaczy wielorezonansowych (por. 3.2.1) w przypadku małej względnej szerokości pasma symetria geometryczna przechodzi w arytmetyczną. Otrzymujemy wtedy

$$p = jx \approx j \frac{\omega - \omega_c}{\frac{\Delta\omega}{2}}. \quad (66)$$

3.3. UNIWERSALNĄ POSTAĆ FUNKCJI WZMOCNIENIA

Funkcja wzmocnienia poszczególnych typów wzmacniaczy dolno- i środkowoprzepustowych, omówionych w 3.1 i 3.2, ma identyczną postać ogólną, odpowiadającą warunkowi (12) (por. równania (26) i (74)):

$$\frac{\hat{k}}{\hat{k}_0} = (-1)^{2n} \cdot \prod_{m=1}^{2n} \left(\frac{\hat{p}_m}{p - \hat{p}_m} \right), \quad (75)$$

¹² Funkcja wzmocnienia jednego stopnia wzmacniacza tego typu odpowiada funkcji wzmocnienia pary stopni wzmacniaczy omówionych poprzednio.

gdzie

ν = liczba biegunów przypadających na 1 stopień wzmocnienia,

$$p = jx, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_m &= -a_m + j\beta_m, \\ \hat{p}_{m+1} &= -a_m - j\beta_m, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Zmienna x określona jest równaniami:

$$x = \frac{\omega}{\omega_g} \quad (19)$$

dla wzmacniaczy dolnoprzepustowych,

$$x = \frac{\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}}{\frac{\Delta\omega}{\omega_c}} \quad (60)$$

dla wzmacniaczy środkowoprzepustowych o symetrii geometrycznej, natomiast

$$x \approx \frac{\omega - \omega_c}{\frac{\Delta\omega}{2}} \quad (66)$$

dla wzmacniaczy środkowoprzepustowych o symetrii arytmetycznej i zmienia się we wszystkich wymienionych przypadkach wewnątrz pasma w granicach

$$0 \leq |x| \leq 1.$$

Funkcje wzmocnienia poszczególnych typów wzmacniaczy różnią się między sobą wyłącznie kształtem zależności k_0 , a_m i β_m od parametrów obwodów. Zależności te obrazuje tablica 3 oparta na wynikach analizy przeprowadzonej w 3.1 i 3.2.

4. SYNTEZA OBWODÓW WZMACNIACZY Z CHARAKTERYSTYKĄ GAUSSA

W tablicy 3 (por. 3.3) podano zależność parametrów biegunów funkcji wzmocnienia a_m , β_m , a_c od parametrów obwodów poszczególnych typów. Wyznaczając na tej podstawie zależności odwrotne otrzymamy następujące wzory:

Dla wzmacniacza dolnoprzepustowego wielorezonansowego (rys. 1 i 2)

$$L_m = \frac{1}{\omega_g^2 C(a_m^2 + \beta_m^2)} = \frac{1}{\omega_g^2 C r_m^2}, \quad (76)$$

Zależność parametrów uniwersalnej funkcji wzmocnienia od parametrów obwodów

Tablica 3

Typ wzm- nia- cza	Dolnoprzepustowy		Srodkowoprzepustowy	
	wielorezonansowy	dwójki ze sprzęż. napięc. szeregowym napięc. równoległ.	dwójki ze sprzęż. napięc. szeregowym	wielorezonansowy o symetrii geometr. o symetrii aryt.
1 i 2	4	6 i 7	8	9
Typ obwo- du wzys.				
Ozna- czenia				
Zało- żone wa- funkl				
$k_0 =$	$\left(\frac{S}{\omega_0 C}\right)^n \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{p_m}\right)$	$\left(\frac{S_e}{\omega_0 C}\right)^n \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{p_m}\right)$	$\left(\frac{S}{\Delta \omega C}\right)^n \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{p_m}\right)$	$\left(\frac{S}{\Delta \omega \sqrt{C_1 C_2}}\right)^n \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{p_m}\right)$
$a_n =$	$\frac{R_m}{2\omega_0 L_m}$	$\frac{1}{\omega_0 C R_m}$	$\frac{1}{\omega_0 C R_m}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_c}{\varepsilon_m} \cdot \frac{1}{Q_m \Delta \omega}$
$\beta_m =$	$\frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{1}{L_m C} - \left(\frac{R_m}{2L_m}\right)^2}$	$\frac{1}{\omega_0 C} \times \frac{1}{R_{m,n+1} - R_{m,n+1}^2}$	$\frac{\omega_c}{\Delta \omega} \left(\gamma_m - \frac{1}{\gamma_m}\right) \times \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_m^2}}$	$\frac{\omega_c}{\Delta \omega} \sqrt{\frac{\varepsilon_m^2 - 1}{4Q_m^2} \left(\frac{\varepsilon_m - 1}{\varepsilon_m}\right)^2}$
$a_c =$	$\frac{1}{\omega_0 C R_c}$	dla trójki centr.	$\frac{1}{Q_c} \cdot \frac{\omega_c}{\Delta \omega}$	$\frac{1}{Q_c} \cdot \frac{\omega_c}{\Delta \omega}$
$\psi_c =$	1	1	1	1

$$R_m = \frac{2a_m}{\omega_g C(a_m^2 + \beta_m^2)} = \frac{2a_m}{\omega_g C r_m^2}, \quad (77)$$

$$R_c = \frac{1}{\omega_g C a_c}, \quad (78)$$

$$R_{m+1} = \frac{L_m}{R_m \cdot C} = \frac{1}{2a_m \omega_g C}. \quad (79)$$

Dla wzmacniacza dolnoprzepustowego, złożonego z dwójek z napięciowym sprzężeniem równoległym (rys. 4)

$$R_m = R_{m+1} \approx \frac{1}{\omega_g C a_m}, \quad (80)$$

$$R_{m,m+1} \approx \frac{S}{2\beta_m^2 \omega_g^2 C} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\beta_m^2 \omega_g^2 C^2}{S} \right)^2} \right]. \quad (81)$$

Dla wzmacniacza dolnoprzepustowego, złożonego z dwójek z napięciowym sprzężeniem szeregowym (rys. 6)

— dla dwójek:

$$R_m \approx R_{m+1} \approx \frac{1}{\omega_g C a_m} \quad (82)$$

$$\frac{R_{m,m+1}}{R_{k,m}} \approx \frac{S^2}{\omega_g^2 C^2 \beta_m^2} - 1, \quad (83)$$

— dla trójki centralnej (rys. 7):

$$R_m = R_{m+1} \approx \frac{1}{\omega_g C a_m}, \quad (84)$$

$$R_{k,m} \approx \frac{\beta_m^2 \omega_g^2 C^2}{S^3}. \quad (85)$$

Dla wzmacniacza środkowoprzepustowego wielorezonansowego (rys. 8)

$$Q_m = Q_{m+1} \approx \frac{\omega_c}{\Delta \omega} \frac{1}{a_m}, \quad (86)$$

$$\omega_m - \omega_c = \omega_c - \omega_{m+1} \approx \frac{\Delta \omega}{2} \beta_m, \quad (87)$$

$$Q_c = \frac{\omega_c}{\Delta \omega} \cdot \frac{1}{a_c}, \quad (88)$$

Dla wzmacniacza środkowoprzepustowego z podwójnymi obwodami sprzężonymi indukcyjnie (rys. 9)

$$Q_m = Q_{2m} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_m + 1}{\varepsilon_m} \frac{\omega_c}{\Delta\omega} \frac{1}{a_m}, \quad (99)$$

$$Q_{1m} = \varepsilon_m \cdot Q_{2m}, \quad (90)$$

$$\kappa_m = \frac{\Delta\omega}{\omega_c} \sqrt{\beta_m^2 + \left(\frac{\varepsilon_m - 1}{\varepsilon_m + 1} \right)^2 a_m^2}. \quad (91)$$

W tabelicy 2 podano wielkości parametrów biegunów funkcji wzmocnienia a_m , β_m , a_c dla przypadku aproksymacji funkcji Gaussa. Synteza obwodów wzmacniaczy poszczególnych typów może być więc dokonana przez podstawienie do równań (76)÷(91) szczegółowych wartości kolejnych $a_1 \dots \beta_1 \dots$ i obliczenie stąd, przy założonych wielkościach ω_g ; $\frac{\Delta\omega}{\omega_c}$; $\Delta\omega$; n , C , ε_m , szukanych parametrów obwodów.

5. WŁASNOŚCI IMPULSOWE WZMACNIACZY Z CHARAKTERYSTYKĄ GAUSSA

Własności impulsowe wzmacniacza mogą być określone przez przyłożenie na jego wejście dowolnego sygnału wzorcowego i badanie sygnału wyjściowego, czyli tak zwanej odpowiedzi. Jako sygnał wzorcowy można wybrać dowolny impuls¹³; w praktyce często stosowany jest skok jednostkowy $1(t)$ określony zależnością

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (92)$$

dla wzmacniaczy dolnoprzepustowych oraz

$$1(t) \cdot \operatorname{Re}(e^{j\omega_c t}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \sin \omega_c t & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (93)$$

dla wzmacniaczy środkowoprzepustowych.

Sygnały wzorcowe określone równaniami (92) i (93) przedstawiono na rys. 10.

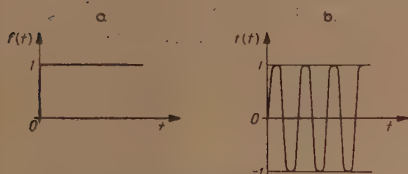
Jeśli na wejście wzmacniacza przyłożyć sygnał wzorcowy tak, jak to pokazano na rys. 10, to na wyjściu otrzymamy przebieg zniekształcony (rys. 11)¹⁴.

¹³ Znajomość odpowiedzi na dowolny sygnał wejściowy pozwala na podstawie całki spłotu [3] znaleźć przebieg odpowiedzi na każdy inny znany sygnał wejściowy.

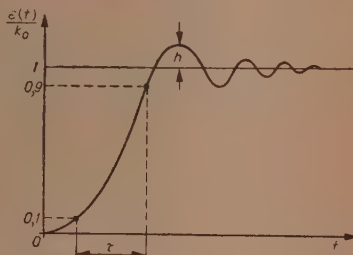
¹⁴ Dla wzmacniaczy środkowoprzepustowych rys. 11 przedstawia górną połowę obwiedni modulacji.

Na podstawie odpowiedzi na skok jednostkowy własności impulsowe wzmacniacza mogą być określone przez następujące wielkości (rys. 11):

- czas narastania odpowiedzi τ , określony na przykład jako czas wzrostu przebiegu odpowiedzi od 0,1 do 0,9 wartości w stanie ustalonym,
- amplitudę pierwszej oscylacji h określoną w stosunku procentowym do wielkości odpowiedzi w stanie ustalonym.



Rys. 10. a. Przebieg $1(t)$; b. Przebieg $1(t) \operatorname{Re}(e^{j\omega_c t})$.



Rys. 11. Odpowiedź na skok jednostkowy.

Wiążąc powyższe wielkości z powszechnie przyjętym współczynnikiem dobroci wzmacniaczy szerokopasmowych, określonym jako iloczyn średniego wzmocnienia na stopień przez szerokość pasma $k_s \cdot \Delta f$, otrzymujemy znane kryteria jakości wzmacniaczy impulsowych [7]:

- iloczyn $\tau \cdot \Delta f$ w którym τ jest czasem narastania odpowiedzi na skok jednostkowy (rys. 11), zaś Δf — szerokością pasma wzmacniacza,
- iloraz $\frac{k_s}{\tau}$, w którym k_s jest średnim wzmocnieniem na stopień, zaś τ — czasem narastania odpowiedzi na skok jednostkowy.

Wielkości określone w a, b, c i d będą omówione w odniesieniu do wzmacniaczy o charakterystyce Gaussa.

Transformacja Laplace'a $e(p)$ funkcji skoku jednostkowego wyraża się równaniem (94), przy czym zgodnie z równaniami (13), (19) i (66) skalę czasu należy wyrazić w $t\omega_g$ dla wzmacniaczy dolnoprzepustowych bądź w $t \frac{\Delta\omega}{2}$ dla wzmacniaczy środkowoprzepustowych, dla których transformacja ta dotyczy jedynie obwiedni modulacji [3], [7]¹⁵

$$e(p) = \frac{1}{p} \quad (94)$$

¹⁵ Procedura powyższa, opisana w [7] rozdz. 7, jest słuszna dla wzmacniaczy środkowoprzepustowych w zakresie, w którym spełnione jest przybliżenie

$p = jx \approx j \frac{\omega - \omega_c}{\Delta\omega}$. Według [7] zakres ten sięga w tym przypadku $\frac{\Delta\omega}{\omega_c} \leq 0,5$.

Wiążąc z równaniem (94) operatorową postać uniwersalnej funkcji wzmocnienia określoną w (75), otrzymujemy transformację odpowiedzi na skok jednostkowy $E(p)$ w postaci ogólnej

$$\frac{E(p)}{k_0} = (-1)^n \cdot \frac{1}{p} \prod_{m=1}^n \left(\frac{\hat{p}_m}{p - \hat{p}_m} \right). \quad (95)$$

Przebieg odpowiedzi na skok jednostkowy $E(t)$ w funkcji czasu otrzymamy stosując do równania (95) odwrotną transformację Laplace'a [3] i wtedy^{16, 17}

$$\frac{E(t)}{k_0} = 1 + a_1 e^{\hat{p}_1 \omega_0 t} + a_2 e^{\hat{p}_2 \omega_0 t} + \dots + a_n e^{\hat{p}_n \omega_0 t}, \quad (96)$$

gdzie

$$a_m = \frac{(-1)^n \cdot \hat{p}_1 \hat{p}_2 \dots \hat{p}_{m-1} \cdot \hat{p}_{m+1} \dots \hat{p}_n}{(\hat{p}_m - \hat{p}_1)(\hat{p}_m - \hat{p}_2) \dots (\hat{p}_m - \hat{p}_{m-1})(\hat{p}_m - \hat{p}_{m+1}) \dots (\hat{p}_m - \hat{p}_n)}. \quad (97)$$

Podstawiając do równań (95) i (96) podane w tablicy 2 szczegółowe wartości parametrów biegunów funkcji aproksymacyjnej Gaussa i analizując otrzymane w ten sposób przebiegi łatwo wyznaczyć interesujące wielkości τ , h , $\tau \Delta f$. Wyniki tej analizy wykazują [4], że dla omawianych wzmacniaczy słuszne są zależności

$$h \leq 0,1^{10/0} \quad (18)$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} \tau \Delta f &\approx 0,348 \text{ dla wzmacniacza dolnoprzepustowego,} \\ \tau \Delta f &\approx 0,696 \text{ dla wzmacniacza środkowoprzepustowego.} \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Jak wynika z powyższych rozważań, wzmacniacze o charakterystyce Gaussa aproksymowanej w opisany sposób odznaczają się prawie monotonicznym przebiegiem odpowiedzi na skok jednostkowy, zgodnie z ogólną teorią układów o minimalnym przesuwie fazowym [2].

¹⁶ Dla wzmacniaczy środkowoprzepustowych w równaniu (96) ω_0 należy zastąpić przez $\frac{\Delta \omega}{2}$.

¹⁷ Dla biegunów pojedynczych.

¹⁸ Dla $n \leq 6$.

6. PORÓWNANIE WZMACNIACZY ASYNCHRONICZNYCH I SYNCHRONICZNYCH

Przeprowadzone niżej przykładowe porównanie wzmacniaczy dolno-przepustowych wielorezonansowych RC ¹⁹ obejmuje:

- a. współczynnik dobroci wzmacniacza $k_s \Delta f$ określony jako iloczyn średniego wzmocnienia na stopień przez 3-decybelową szerokość pasma²⁰,
- b. stopień aproksymacji funkcji Gaussa, określonej przez charakterystyki wzmocnienia obu rodzajów wzmacniaczy, oraz
- c. iloraz $\frac{k_s}{\tau}$ średniego wzmocnienia na stopień przez czas narastania odpowiedzi na skok jednostkowy (por. rys. 11).

Odnosnie do punktu *a* można zauważyć, że iloczyn $k_s \Delta f$ dla rozpatrywanych wyżej wzmacniaczy asynchronicznych łatwo wyznaczyć z wartości k_0 podanej w tablicy 3 i określonej zależnością

$$k_0 = \left(\frac{S}{\omega_g \cdot C} \right)^n \cdot \prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{\hat{p}_m} \right), \quad (25)$$

gdzie

$$\hat{p}_m = -a_m + j\beta_m. \quad (14)$$

Z równania (25) wynika

$$k_s \cdot \Delta f = \sqrt[n]{k_0} \cdot f_g = \frac{S}{2\pi C} \cdot \sqrt[n]{\prod_{m=1}^n \left(\frac{1}{\hat{p}_m} \right)}. \quad (99)$$

Podstawiając do (99) wartości parametrów biegunów σ_m, β_m (podane w tablicy 2) otrzymujemy wyniki zebrane w tablicy 4. W tejże tablicy podano wielkości iloczynu $k_s \Delta f$ dla synchronicznych wzmacniaczy RC , obliczone ze znanej zależności [7]

$$k_s \cdot \Delta f = \frac{S}{2\pi C} \sqrt{\frac{1}{2^n - 1}}. \quad (100)$$

Jak widać, wzmacniacze asynchroniczne o charakterystyce Gaussa pozwalają przy jednakowym wzmocnieniu uzyskać szersze pasmo niż synchroniczne, przy czym zysk ten rośnie z liczbą stopni.

¹⁹ Porównanie to jest słuszne dla wszystkich omówionych typów wzmacniaczy dwójnikowych, jeśli pominąć nieznaczne zmniejszenie efektywnego nachylenia lamp we wzmacniaczach ze sprzężeniem zwrotnym.

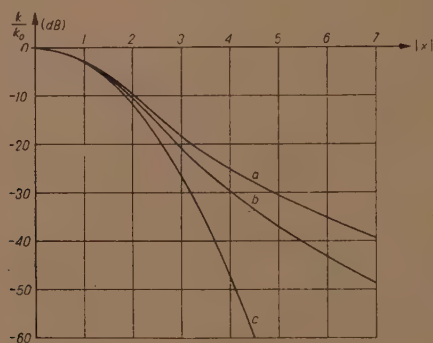
²⁰ Współczynnik ten jest powszechnie stosowany dla określenia jakości wzmacniaczy szerokopasmowych [7].

Tablica 4

Porównanie współczynników dobroci
wzmacniaczy asynchronicznych i synchronicznych

n	$(k_s \cdot \Delta f) \cdot \frac{2\pi C}{S}$	
	wzmacniacze synchroniczne	wzmacniacze asynchroniczne
2	0,64	0,722
3	0,51	0,621
4	0,44	0,560
5	0,39	0,515
6	0,35	0,482

W odniesieniu do punktu b łatwo wykazać, że charakterystyka wzmocnienia wzmacniaczy asynchronicznych lepiej aproksymuje przebieg funkcji Gaussa niż synchronicznych wzmacniaczy RC. Dla przykładu na rys. 12 podano obie charakterystyki dla $n=4$.



Rys. 12. Charakterystyki wzmocnienia 4-stopniowego wzmacniacza

a. wzmacniacz synchroniczny RC. b. wzmacniacz asynchroniczny.
c. idealna charakterystyka Gaussa.

Na koniec odnośnie do punktu c iloraz $\frac{k_s}{\tau}$ dla wzmacniaczy asynchronicznych łatwo wyznaczyć z zależności $\frac{k_s}{\tau} = \frac{k_s \cdot \Delta f}{\tau \Delta f}$, w której wielkość $\tau \Delta f$ określona jest równaniem (98), natomiast wielkość $k_s \Delta f$ znajduje się w tablicy 4. Otrzymane wyniki zestawiono w tablicy 5.

Tablica 5

**Porównanie własności impulsowych
wzmacniaczy asynchronicznych i synchronicznych**

n	$\frac{k_s}{\tau} \cdot \frac{C}{S}$	
	wzmacniacze synchroniczne	wzmacniacze asynchroniczne
2	0,290	0,334
3	0,232	0,285
4	0,20	0,257
5	0,177	0,234
6	0,16	0,219

W tej samej tablicy podano odpowiednie wartości ilorazu $\frac{k_s}{\tau}$ dla synchronicznych wzmacniaczy RC wyznaczone w ten sam sposób²¹.

Jak widać, wzmacniacze asynchroniczne o charakterystyce Gaussa pozwalają przy jednakowym wzmocnieniu uzyskać mniejszy czas narastania odpowiedzi na skok jednostkowy, a zatem wierniejsze odtworzenie impulsu wejściowego. Zysk ten rośnie z liczbą stopni.

*Katedra Podstaw Telekomunikacji
Politechniki Warszawskiej*

WYKAZ LITERATURY

1. Aiken C. — Two-mesh tuned coupled circuits filters. PIRE, luty 1937.
2. Bode H. W. — Network analysis and feed back amplifiers design. v. Nostrand. New-York 1948.
3. Gardner M., Barnes J. — Pierechodnyje processy w liniowych sistemach. Gostiechizdat 1949.
4. Golde W. — Synteza wzmacniaczy szerokopasmowych wielorezonansowych. Publikacja nr 20 Katedry Podstaw Telekomunikacji Pol. Warsz. 1954.
5. Rizkin A. — Osnovy teorii usilitelnych schiem. Sow. Radio. Moskwa 1951.
6. Thomson W. E. — Stagger-tuned low pass amplifiers. Wireless Engineer, listopad 1949.
7. Valley G., Wallman H. — Łampowyje usiliteli, Sow. Radio, Moskwa 1950.

²¹ Dla wzmacniaczy synchronicznych RC słuszną jest także w przybliżeniu zależność (98) [7].

DODATEK

Do rozdz. 3. 1. 4.

Oznaczając napięcie na siatce m -tego stopnia wzmacniacza (por. rys. 5) przez e_{m-1} , dla poszczególnych stopni wzmocnienia otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{S'_n}{\hat{Y}_1} (e_0 - b_1 e_2), \\ e_2 &= \frac{S'_2}{\hat{Y}_2} (e_1 - b_2 e_3), \\ &\dots\dots\dots \\ e_{n-1} &= \frac{S'_{n-1}}{\hat{Y}_{n-1}} (e_{n-2} - b_{n-1} e_n), \\ e_n &= \frac{S_n}{\hat{Y}_n} e_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} S'_1 &= \frac{S}{1 + R_{k1} S}; \quad \dots; \quad S'_{n-1} = \frac{S}{1 + R_{k,n-1} S}; \quad S_n = S \\ b_1 &= \frac{R_{k1}}{R_{k1} + R_{12}}; \quad \dots; \quad b_{n-1} = \frac{R_{k,n-1}}{R_{k,n-1} + R_{n-1,n}}; \quad b_n = 0 \\ \hat{Y}_1 &= G_1 + j\omega C; \quad \hat{Y}_2 = G_2 + \frac{1}{R_{12} + R_{k1}} + j\omega C; \quad \dots \\ &\dots \quad \hat{Y}_n = G_n + \frac{1}{R_{n-1,n} + R_{k,n-1}} + j\omega C \\ G_m &= \frac{1}{R_m} \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

Dzieląc obie strony równań (1a) przez e_0 i rozwijając je otrzymujemy zespół równań (41).

Do rozdz. 3. 1. 5.

Funkcja wzmocnienia dwóch pierwszych stopni trójki (por. rys. 7) wyrazi się jako

$$\hat{k}_{m,m+1} = \frac{\frac{S'_m S'_{m+1}}{\hat{Y}_m \cdot \hat{Y}_{m+1}}}{1 + b'_m \cdot \frac{S'_m S'_{m+1}}{\hat{Y}_m \cdot \hat{Y}_{m+1}}} = \frac{S'_m S'_{m+1}}{\hat{Y}_m \cdot \hat{Y}_{m+1} + b'_m S'_m S'_{m+1}} \quad (3a)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} S'_m &= \frac{S}{1 + R_{k,m} \cdot S}; & S'_{m+1} &= S \\ b'_m &= \frac{S}{1 + S R_{k,m}} R_{k,m} = S'_m R_{k,m} \\ \hat{Y}_m &= G_m + j\omega C; & G_m &= \frac{1}{R_m} \\ \hat{Y}_{m+1} &= G_{m+1} + j\omega C; & G_{m+1} &= \frac{1}{R_{m+1}} \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

Funkcja wzmocnienia trzeciego stopnia trójki będzie

$$\hat{k}_c = - \frac{S'_c}{\hat{Y}_c} \quad (5a)$$

gdzie

$$S'_c = \frac{S}{1 + R_{k,m} \cdot S}; \quad \hat{Y}_c = G_c + j\omega C; \quad G_c = \frac{1}{R_c} \quad (6a)$$

Funkcja wzmocnienia całej trójki będzie więc

$$\hat{k}_{m,m+1,c} = \hat{k}_{m,m+1} \cdot \hat{k}_c = - \frac{S'_m S'_{m+1} S'_c}{(\hat{Y}_m \cdot \hat{Y}_{m+1} + b'_m S'_m S'_{m+1}) \hat{Y}_c} \quad (7a)$$

Podstawiając do (7a) wielkości $\hat{Y}_m, \hat{Y}_{m+1}, \hat{Y}_c, S'_m, S'_{m+1}, S'_c$ z (4a) i (6a) otrzymujemy równanie (45).

В. ГОЛЬДЕ

МНОГОСТЕПЕННЫЕ ШИРОКОПОЛОСНЫЕ УСИЛИТЕЛИ С ГАУССОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Резюме

Широкополосные усилители с гауссовой характеристикой часто применяются в импульсных, измерительных и других устройствах. Однако до сих пор применялись обыкновенно синхронные усилители типа RC нижних частот или эквивалентные с ними полосовые RLC с одним резонансным контуром. В настоящей статье обсуждены проектировочные методы и свойства асинхронных широкополосных усилителей такого типа, которые, как это доказывается, отличаются лучшими свойствами, чем синхронные.

В первой части статьи проведена тайлорова аппроксимация гауссовой функции уравнением $\varphi(x) = e^{-\delta x^2}$

Аппроксимация этой функции поблизости $x=0$ выражается при помощи функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\delta}{1!} x^2 + \frac{(2\delta)^2}{2!} x^4 + \dots + \frac{(2\delta)^n}{n!} x^{2n}}} \quad (1)$$

в которой значение δ определено из следующего условия: на краях раздела функция $f(x)$ уменьшается на 3 дБ (согласно с общепринятым определением 3-децибеловой ширины полосы); в статье доказано, что δ мало зависит от n и равно 0,366 для $n = 2$ и приблизительно 0,348 для $n \geq 3$.

Принимая, что функция $f(x)$ представляет модуль функции усиления n -степенного усилителя, определена полярная форма самой функции усиления $F(p)$, модулем которой является $f(x)$

$$F(p) = \prod_{m=1}^n \frac{\hat{p}_m}{p - \hat{p}_m} \quad (2)$$

где $p = jx$, а $\hat{p}_m = -a_m + j\beta_m$ — полюс функции усиления.

Затем подробно рассчитаны значения параметров полюсов a_m и β_m функции $F(p)$ и составлена таблица этих значений.

Во второй части статьи рассматривается ряд чаще всего применяемых типов широкополосных усилителей, схематически указанных на рис. 1-9.

Функции усиления указанных типов усилителей, как доказано в статье, могут быть выражены в однородном виде (2), причём

$$p = jx = j \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{— для контуров нижних частот,}$$

$$p = jx = j \frac{\frac{\omega_c}{\omega} - \frac{\omega_c}{\omega}}{\frac{\Delta\omega}{\omega_c}} \approx j \frac{\omega - \omega_c}{\frac{\Delta\omega}{2}} \quad \text{— для полосовых контуров высокой частоты}^1$$

Для описываемых типов усилителей определены затем и сведены в таблицы зависимости параметров R, L, C, M от параметров полюсов функции усиления a_m и β_m .

Подставляя в вышеприведенные зависимости отдельные значения a_m и β_m вычисленные в первой части статьи, в третьей части получены непосредственные данные для проектировки отдельных типов усилителей, собранные в виде простых формул, определяющих искомые величины элементов контуров R, L, C, M .

В четвёртой части проведён анализ импульсных свойств спроектированных таким образом усилителей, который доказывает, что реакция на ступенчатую функцию для этих усилителей почти монотонична, а выброс не больше 0,1% для встречаемого в практике числа степеней усиления.

Затем приведено доказательство, что для этого типа усилителей (также как и для синхронических) правильно соотношение $\tau \Delta f \approx 0,35$, (где τ — время нарастания реакции на ступенчатую функцию от 0,1 до 0,9 конечного значения).

В последней части статьи сравниваются свойства оговариваемых асинхронных усилителей с гауссовой характеристикой с синхронными усилителями. Частное $\frac{k}{\tau}$

для первых оказывается большим чем для вторых, что явствует из таблицы 5 и поэтому описанные асинхронные усилители, как кажется, более экономны чем синхронные.

¹ Приближение правильно при $\frac{\Delta\omega}{\omega_c} \leq 0,1$

W. GOLDE

WIDE-BAND MULTISTAGE AMPLIFIERS
WITH GAUSSIAN CHARACTERISTICS

Summary

Wide-band amplifiers with Gaussian characteristics are often applied in pulse-sets, measuring apparatus, etc. Nevertheless only synchronous amplifiers of the RC-type (low-pass) or the equivalent RLC-type (band-pass) with a single resonant circuit have been used in present practice. The method of design and properties of the asynchronous wide-band amplifiers of similar types with better properties than synchronous amplifiers have been discussed in this paper.

Taylor's approximation of Gaussian function given by formula

$$g(x) = e^{-\delta x^2}$$

is computed in the first part of this paper. This function is approximated near the point $x=0$ with the aid of the function:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\delta}{1!}x^2 + \frac{(2\delta)^2}{2!}x^4 + \dots + \frac{(2\delta)^n}{n!}x^{2n}}} \quad (1)$$

in which the value of δ has been obtained by assuming that the function $f(x)$ decreases by 3 db at both ends of the interval (according to commonly adopted definition of 3 db band-width). It has been proved that n has only a small influence on the value of δ and for example δ equals 0,366 for $n=2$, and approximately 0,348 for $n \geq 3$.

The polar form of the amplification function $F(p)$ has been computed assuming that the function $f(x)$ represents the magnitude of the amplification function of the n -stage amplifier:

$$F(p) = \prod_{m=1}^n \frac{\hat{p}_m}{\hat{p} - \hat{p}_m} \quad (2)$$

where $p=jx$, $p_m = -\alpha_m + j\beta_m$ — a pole of the amplification function.

Then the values of pole parameters of most commonly used and shown schematically in Fig. 1÷9 circuits are considered in the second part of the paper.

It has been proved that amplification functions of the given types of amplifiers can be written in a uniform way (2), where

$$p = jx = j \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{— for low-pass circuits}$$

$$p = jx = j \frac{\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}}{\frac{\Delta\omega}{\omega_c}} \approx j \frac{\omega - \omega_c}{\frac{\Delta\omega}{2}} \quad \text{— for band-pass circuits}^1$$

The interdependences of the circuit-parameters R , L , C , M and the pole parameters of the amplification functions α_m and β_m have been computed and tabulated for all types of amplifiers discussed above.

¹ The approximation is correct for $\frac{\Delta\omega}{\omega_c} \leq 0,1$.

The design data for those types have been computed in the third part of this paper by substituting in the formulae mentioned above the values α_m and β_m computed in the first part. These data are in the form of simple formulae determining the circuit-elements R , L , C , M .

The pulse properties of such amplifiers have been analysed in the fourth part of this paper. The response to a unit step has been proved to be nearly monotonic and oscillations (overshoots) do not exceed 0,1% for the number of stages encountered in practice.

Next the relation $\tau \Delta \approx f 0,35$ has been proved for this type of amplifiers — similarly as for the synchronous amplifiers (where τ —time in which the response to a unit step rises from 0,1 to 0,9 of its steady — state value).

A comparison between the discussed asynchronous amplifiers with Gaussian characteristics and synchronous amplifiers has been done in the last part of this paper.

It is evident that the ratio $\frac{k}{\tau}$ is greater for the former as shown in table 5. This is the reason why the discussed asynchronous amplifiers seem to be more economical than the synchronous ones.

621.3.011 : 621.392.1

K. BOCHENEK

Niektóre zagadnienia związane ze stosowaniem wektorów Hertza

Rękopis dostarczono 21. 6. 1954

W praktyce stosowane są dwie metody wyznaczania pola elektromagnetycznego za pomocą funkcji wektorowych, zwanych wektorami Hertza (elektrycznym i magnetycznym). Jedna metoda polega na wykorzystaniu jednego tylko wektora; w drugiej metodzie wykorzystuje się dwa wektory, przy czym każdy z nich ma jedną współrzędną prostokątną różną od zera.

1. WSTĘP

Praca niniejsza poświęcona jest w zasadzie badaniu warunków stosowalności metody analizy pól wektorowych, spełniających układ równań makswellowskich, polegającej na wprowadzeniu pomocniczej funkcji wektorowej, zwanej wektorem Hertza.

Wymieniona metoda bywa chętnie stosowana w zagadnieniach praktycznych ze względu między innymi na to, że pozwala na zastąpienie badania dwóch funkcji (natężenia pola elektrycznego i magnetycznego), spełniających układ równań, badaniem jednej funkcji, spełniającej jedno równanie falowe. Dążenie do tego samego celu np. na drodze wyrugowania jednego z natężeń pól napotyka na kłopoty w postaci wprowadzenia funkcji nie spełniających równań makswellowskich, jak to dalej będzie omówione. Wprowadzenie jednak tej metody jest dokonywane w sposób formalny nawet w tego rodzaju ujęciach monograficznych, jak „Electromagnetic Theory“ J. A. Strattona [6]. W związku z tym brak jest między innymi odpowiedzi na ważne pytanie, dotyczące ogólności tej metody. Innymi słowy chodzi o to, jakie pole elektromagnetyczne da się w ten sposób analizować. Powoduje to w praktyce nieprzyjemną sytuację, polegającą na tym, że poszukujemy rozwiązania na drodze, na której nie wiadomo, czy rozwiązanie to da się osiągnąć. Co gorzej, wprowadzenie dwóch wektorów Hertza: elektrycznego i magnetycznego sugeruje myśl, że dopiero superpozycja pól wyznaczonych przez oba te wektory ma pożądane cechy ogólności. Sytuacja taka byłaby nader niekorzystna, pociągałaby za sobą potrzeby równoczesnego dobierania dwóch rozwiązań odpowiednich rów-

nań różniczkowych, tak aby w sumie wyznaczone przez nie pole elektromagnetyczne spełniało odpowiednie warunki brzegowe.

Otrzymana odpowiedź pozytywna co do ogólności rozwiązań dawanych przez każdy wektor Hertza z osobna pozwala zatem na swobodny wybór najprostszego dla danego problemu z trzech równie ogólnych dróg określenia pola przez: wektor Hertza elektryczny, magnetyczny lub w pewnych specjalnych przypadkach — przez oba te wektory na raz.

Prawie równie ważne jest zagadnienie ogólności, stosowanej najczęściej w falowodach, modyfikacji metody określania pola elektromagnetycznego przez wektory Hertza. Mianowicie pole określa się przez dwa wektory Hertza, z których każdy posiada tylko jedną składową prostokątną kartezjańską, przy czym składowe te są kolinearne. Pole zostaje w ten sposób rozdzielone na pole typu TE i typu TM , to znaczy na pole nie posiadające odpowiednio jednej składowej pola elektrycznego lub magnetycznego. Pole typu TE zostaje określone przez składową magnetycznego wektora Hertza, a pole typu TM — elektrycznego.

Metodę tę uznaje za ogólną Schelkunoff (współpracownik laboratorium Bella) w swoim podręczniku *Electromagnetic Waves* [7], dowód podany przez niego jest jednak błędny. Sprowadza on zagadnienie do wyznaczenia rozwiązania pewnego równania różniczkowego, podczas gdy w istocie jest to delikatny i ciekawy z matematycznego punktu widzenia problem istnienia funkcji spełniającej równocześnie dwa równania różniczkowe cząstkowe.

Znaczny obecnie rozwój techniki mikrofalowej pociąga za sobą potrzebę ścisłego rozwiązania wielu problemów z dziedziny pola elektromagnetycznego. Wystarczy powiedzieć, że podstawowe dla odbioru fal radiowych zagadnienie dyfrakcji fali płaskiej przez ograniczone ciała przewodzące zostało dotychczas ściśle rozwiązane tylko w przypadku kuli i elipsoidy, co daje dość ograniczone informacje o zachowaniu się anten odbiorczych o najczęściej spotykanych kształtach.

Przedstawiona w zarysie sytuacja była powodem do napisania niniejszej pracy. Praca składa się ze wstępu i trzech części. W dwóch pierwszych omówiono powyżej scharakteryzowane zagadnienia stosowalności wektorów Hertza. Trzecia część zawiera twierdzenia z analizy wektorowej w ujęciu specjalnie przystosowanym do omawianych w pracy zagadnień.

2. WYRAŻANIE PÓŁ ELEKTROMAGNETYCZNYCH ZA POMOCĄ JEDNEGO WEKTORA HERTZA

Poniższa część pracy poświęcona jest głównie zagadnieniu ogólności wyrażań dla pola elektromagnetycznego, otrzymanych za pomocą jednego wektora Hertza, elektrycznego lub magnetycznego. To znaczy, iż chodzi o sprecyzowanie założeń, przy których pewne pole elektromagnetyczne,

spełniające układ równań Makswella, da się za pomocą takich wyrażeń określić. Przy tej okazji omówiono krótko proste i znane zagadnienie, czy każdemu wektorowi Hertza (spełniającemu swoje równanie różniczkowe) odpowiada pewne możliwe, to znaczy spełniające równania maxwellowskie, pole elektromagnetyczne oraz czy dla danego pola elektromagnetycznego wektor Hertza jest jednoznacznie określony.

Jako punkt wyjścia przyjęto układ równań maxwellowskich dla ośrodka izotropowego i jednorodnego bez prądów przewodzenia i bez swobodnych ładunków elektrycznych. Założono, że ε i μ nie zależą od natężeń pól, czyli że ośrodek jest liniowy.

Przyjęty układ równań ma zatem postać

$$\nabla \times \vec{E} + \mu \dot{\vec{H}} = 0, \quad (1) \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \varepsilon \dot{\vec{E}} = 0, \quad (2) \quad \varepsilon = \text{const}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (3) \quad \mu = \text{const}, \quad (6)$$

W celu zbadania ogólności wyprowadzanych wyrażeń założono, że dane są pewne funkcje $\vec{E}(x, y, z, t)$ i $\vec{H}(x, y, z, t)$ spełniające oprócz zależności (1) do (6) niżej podane warunki. Na tej podstawie udowodniono, że funkcje te dadzą się wyrazić za pomocą odpowiednich wyrażeń.

Zmienne x, y, z, t oznaczają trzy współrzędne w wybranym układzie kartezjańskim prostokątnym oraz czas.

Założono, że funkcje $\vec{E}(x, y, z, t)$ i $\vec{H}(x, y, z, t)$ są określone w przedziale czasowym $t_1 < t < t_2$ i w pewnym obszarze przestrzennym, pozwalającym na stosowanie twierdzeń z analizy wektorowej. Ponadto założono, że funkcje te są ciągłe w obszarze, w którym są zdefiniowane, wraz z pochodnymi cząstkowymi względem współrzędnych, aż do drugiego rzędu włącznie. Można przy tym zauważyć, że znaczna część analizy przebiega bez trudności przy założeniu istnienia jedynie ciągłych pierwszych pochodnych, ciągłość drugich pochodnych interweniuje dopiero pod koniec wyprowadzenia, przy czym i w tym miejscu założenie to jest zbyt ostre.

W stosunku do czasu założono, że zarówno same funkcje \vec{E} i \vec{H} , jak również ich pochodne cząstkowe względem współrzędnych do drugiego rzędu włącznie można różniczkować względem czasu dowolną liczbę razy bez naruszenia ciągłości. To założenie jest również zbyt silne, zostaje ono jednak zrobione ze względu na to, że z praktycznego punktu widzenia najbardziej interesujące są przypadki zależności od czasu w postaci $e^{-i\omega t}$ spełniającej powyższe założenie.

Przy uwzględnieniu ciągłości pierwszych pochodnych cząstkowych wektora \vec{H} z równania (3) wynika możliwość przedstawienia tego wektora w postaci rotacji innego wektora. Ogólność rozważań nie zostanie naru-

szona przy założeniu, że wektor ten ma postać iloczynu stałej różnej od zera przez pochodną cząstkową pewnego wektora względem czasu

$$\vec{H} = \varepsilon \nabla \times \vec{\Pi}. \quad (7)$$

Aby znaleźć sam wektor $\vec{\Pi}$ wystarczy podzielić przez ε funkcję pierwotną względem czasu wektora, którego \vec{H} jest rotacją. Istnienie tej funkcji pierwotnej jest zapewnione, jak łatwo zauważyć, dzięki ciągłości funkcji $\vec{\Pi}$. Ciągłość wynika z konstrukcji funkcji $\vec{\Pi}$ zgodnie z twierdzeniem z analizy wektorowej. W dalszym ciągu będzie stale zakładane, że funkcje, których istnienie przyjmuje się na podstawie twierdzeń z analizy wektorowej, są konstruowane według metody podanej w dowodzie tych twierdzeń.

Wektor $\vec{\Pi}$, noszący miano elektrycznego wektora Hertza, nie jest za pomocą równania (7) jednoznacznie określony. Na razie wystarczy podkreślić, że do wektora $\vec{\Pi}$ można dołączyć gradient dowolnej funkcji, mającej drugie pochodne cząstkowe ciągłe (względem x, y, z). Do wektora $\vec{\Pi}$ ponadto można dołączyć dowolne pole od czasu niezależne, nie naruszając przy tym równania (7).

Po przestawieniu kolejności różniczkowania względem czasu (co jest możliwe ze względu na ciągłość pochodnych do rzędu występującego włącznie wektora $\vec{\Pi}$) z równania (1) wynika zależność

$$\nabla \times (\vec{E} + \varepsilon \mu \ddot{\vec{\Pi}}) = 0. \quad (8)$$

Wektor w nawiasach, który, jak łatwo spostrzec, posiada ciągłe pochodne cząstkowe, da się przedstawić jako gradient pewnej funkcji skalarnej. Wniosek ten można napisać w postaci

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \varepsilon \mu \ddot{\vec{\Pi}}. \quad (9)$$

Należy tu zauważyć, że istnienie wprowadzanych funkcji (Π i φ) jest zapewnione ze względu na założenie istnienia funkcji \vec{E} i \vec{H} spełniających równania (1) do (6).

Korzystając z równania (2) otrzymuje się zależność

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \nabla \times \vec{\Pi} + \nabla \varphi + \varepsilon \mu \ddot{\vec{\Pi}}) = 0. \quad (10)$$

Wypisane operacje różniczkowania są wykonalne ze względu na wykonalność odpowiednich operacji na wektorach \vec{E} i \vec{H} i prowadzą, jak łatwo zauważyć, do funkcji ciągłych. Jeżeli pochodna jakiejś funkcji względem czasu jest równa tożsamościowo zeru, oznacza to, że funkcja ta od czasu nie zależy; oczywiście słuszna jest również zależność odwrotna. Przy sto-

sownie dobranej funkcji wektorowej \bar{A}_0 , niezależnej od czasu, równanie (10) jest zatem równoważne równaniu

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\Pi} + \nabla \varphi + \varepsilon \mu \ddot{\bar{\Pi}} = \bar{A}_0. \quad (11)$$

O własnościach funkcji \bar{A}_0 można łatwo wnioskować na podstawie lewej strony równania (11); pierwszy składnik jest rotacją pewnego wektora, następne dwa składniki jako równe $-\bar{E}$ posiadają w sumie diwergencję równą zeru. Biorąc jeszcze pod uwagę ciągłość pochodnych cząstkowych \bar{E} (wystarczy tu ciągłość pierwszych pochodnych), sumę tych składników można przedstawić jako

$$\nabla \varphi + \varepsilon \mu \ddot{\bar{\Pi}} = \nabla \times \nabla \times \bar{B}, \quad (12)$$

przy czym funkcja \bar{B} będzie miała drugie pochodne cząstkowe ciągłe.

Z równania (11) wynika, że

$$\nabla \times \nabla \times (\bar{\Pi} + \bar{B}) = \bar{A}_0. \quad (13)$$

Zależność ta ma miejsce dla dowolnej chwili t' z przedziału (t_1, t_2) , zatem \bar{A}_0 da się wyrazić jako rotacja rotacji funkcji od czasu niezależnej; wystarczy w tym celu ustalić czas w funkcji wektorowej w nawiasach. Otrzymana w ten sposób funkcja zostaje oznaczona przez $\bar{\Pi}_0$

$$(\bar{\Pi} + \bar{B})_{t=t'} = \bar{\Pi}_0, \quad (14)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\Pi}_0 = \bar{A}_0. \quad (15)$$

Dzięki pozostałej jeszcze dowolności wektora $\bar{\Pi}$, co na początku podkreślono, zostanie teraz wykazane, że wektor $\bar{\Pi}$ można zawsze dobrać w taki sposób, aby funkcja wektorowa \bar{A}_0 była tożsamościowo równa zeru. Zakładając, że $\bar{\Pi}$ było początkowo wybrane jako całka oznaczona z $\dot{\bar{\Pi}}$ od t_1 do t . Wtedy nowy wektor

$$\bar{\Pi}' = \bar{\Pi} - \bar{\Pi}_0 \quad (16)$$

spełnia postawione warunki. Do wektora $\bar{\Pi}$ został mianowicie dołączony wektor od czasu niezależny; równania (7), (8), (9) będą dla wektora $\bar{\Pi}$ spełnione, gdyż wszędzie tam występuje różniczkowanie względem czasu, natomiast, jak łatwo sprawdzić z równania (11) uwzględniając równania (15) i (16), otrzymuje się równanie

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\Pi}' + \nabla \varphi + \varepsilon \mu \ddot{\bar{\Pi}'} = 0. \quad (11')$$

Oba składniki wektora $\bar{\Pi}'$ występujące w równaniu (16), a zatem i sam wektor, mają ze względu na konstrukcję drugie pochodne cząstkowe ciągłe.

Reasumując dotychczasowe rozważania i zamiast $\bar{\Pi}'$ pisząc po prostu $\bar{\Pi}'$ otrzymuje się, że dla danych pól \bar{E} i \bar{H} spełniających podane założenia zawsze można dobrać funkcję wektorową $\bar{\Pi}$ i skalarną φ tak, aby

$$\bar{H} = \varepsilon \nabla \times \bar{\Pi}, \quad (7) \quad \bar{E} = -\nabla \varphi - \varepsilon \mu \ddot{\bar{\Pi}} \quad (9)$$

oraz aby zachodziło równanie

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\Pi} + \nabla \varphi + \varepsilon \mu \ddot{\bar{\Pi}} = 0. \quad (11')$$

W celu uproszczenia wyprowadzonych wyrażeń, a mianowicie wyrugowania funkcji skalarnej φ , wygodnie jest zmodyfikować funkcję wektorową przez dołączenie do niej gradientu pewnej funkcji skalarnej, która zostanie oznaczona przez ξ . Przyjmujemy

$$\bar{\Pi}'' = \bar{\Pi} - \nabla \xi. \quad (17)$$

Równanie (7) oraz pierwszy składnik równania (11') nie ulegają zmianie dla funkcji $\bar{\Pi}''$. Funkcja ξ zostaje dobrana w taki sposób, aby

$$\nabla \varphi + \varepsilon \mu \ddot{\bar{\Pi}} = -\nabla (\nabla \Pi'') + \varepsilon \mu \ddot{\bar{\Pi}}'' \quad (18)$$

Wystarczy w tym celu zadośćuczynić równaniu

$$\nabla^2 \xi - \varepsilon \mu \ddot{\xi} = \varphi + \nabla \bar{\Pi} = g. \quad (19)$$

Chodzi o wyznaczenie jedynie jakiejś całki szczególnej tego równania różniczkowego. Funkcja g jest znaną funkcją mającą ciągle pierwsze pochodne cząstkowe (względem współrzędnych). Rozwiązanie wyznaczamy podobnie jak rozwiązanie równania Poissona, stosując jednak potencjał opóźniony zamiast zwykłego potencjału¹. Pisząc jeszcze dla prostoty tak jak poprzednio zamiast $\bar{\Pi}'' - \bar{\Pi}$ otrzymuje się, że wektory \bar{E} i \bar{H} dadzą się wyrazić przez wektor $\bar{\Pi}$ spełniający równanie

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\Pi} - \nabla (\nabla \bar{\Pi}) + \varepsilon \mu \ddot{\bar{\Pi}} = 0 \quad (20)$$

lub, po przekształceniu przy ciągłości drugich pochodnych cząstkowych wektora $\bar{\Pi}$,

$$\nabla^2 \bar{\Pi} - \varepsilon \mu \ddot{\bar{\Pi}} = 0. \quad (21)$$

Wzory wyrażające wektory \bar{E} i \bar{H} mają ostatecznie postać

$$\bar{H} = \varepsilon \nabla \times \bar{\Pi} \quad (7) \quad \bar{E} = \nabla (\nabla \cdot \bar{\Pi}) - \varepsilon \mu \ddot{\bar{\Pi}} = \nabla \times \nabla \times \bar{\Pi}, \quad (22)$$

przy czym drugie wyrażenie na \bar{E} otrzymuje się uwzględniając poprzednio napisane równanie wektora Hertza. Odpowiedź dotycząca ogólności otrzymanych wyrażeń jest więc pozytywna.

¹ W miarę potrzeby poza przedział (t_1, t_2) funkcję g przedłużamy dowolnie byle dostatecznie regularnie.

Odpowiedź na pytanie, czy każdemu wektorowi Hertza odpowiada pole elektromagnetyczne spełniające równania makswellowskie, otrzymuje się bardzo łatwo zakładając, że dla pewnego wektora \vec{H} zachodzą równania (21), (7) i (22), że wektor ten ma pochodne cząstkowe do trzeciego rzędu włącznie ciągle względem zmiennych x, y, z, t , oraz że zachodzą równania (5) i (6). Spełnienie równań makswellowskich (1) do (4) sprawdza się wtedy przez bezpośrednie podstawienie.

Otrzymana przed chwilą pozytywna odpowiedź co do spełniania równań makswellowskich jest jedną z podstawowych zalet wektora Hertza.

Gdyby bowiem pójść inną drogą i z równań makswellowskich wyrzucić jedną z funkcji \vec{E} lub \vec{H} — otrzymałoby się równanie identyczne jak dla wektora \vec{H} . O ile jednak, jak zostało wykazane przy istnieniu pochodnych ciągłych odpowiedniego rzędu, spełnianie przez wektor Hertza równania falowego jest warunkiem dostatecznym na to, aby pole elektromagnetyczne spełniało układ równań makswellowskich, to jak się okazuje, spełnianie przez jeden z wektorów \vec{E} lub \vec{H} swego równania różniczkowego jest jedynie warunkiem koniecznym, a nie dostatecznym zachodzenia równań makswellowskich. Łatwo można podać przykład, że do jednego z wektorów \vec{E} lub \vec{H} spełniającego swoje równanie różniczkowe nie można dobrać drugiego wektora, tak aby spełnić równania Maxwella. Nie mamy zatem w tym ostatnim przypadku pewności, że rozwiązując odpowiednie równanie różniczkowe znajdujemy możliwe pole elektryczne lub magnetyczne.

Po uwzględnieniu obu pozytywnych odpowiedzi, otrzymanych dotychczas, widoczny staje się fakt, że badanie rozwiązań równań makswellowskich daje się zastąpić przy dosyć ogólnych założeniach badaniem rozwiązań równania falowego wektora Hertza, bowiem z każdego z nich otrzymujemy pewne rozwiązanie równań makswellowskich i wszystkie te rozwiązania w ten sposób można otrzymać.

Jeżeli chodzi o trzecie pytanie dotyczące jednoznaczności wektora Hertza wyznaczającego dane pole elektromagnetyczne, odpowiedź wypada negatywna. Wystarczy wrócić do równania (19), aby stwierdzić, że ponieważ było zupełnie obojętne, która z całek szczególnych tego równania zostanie wybrana — wektor \vec{H} nie jest jednoznacznie określony, a można do niego dołączyć gradient funkcji spełniającej odpowiednie jednorodne równanie falowe

$$\nabla^2 \xi - \varepsilon \mu \ddot{\xi} = 0 \quad (23)$$

i mającej dostateczną liczbę ciągłych pochodnych.

Odpowiednie rozważania na temat magnetycznego wektora Hertza są bardzo podobne i prowadzą do identycznych odpowiedzi na postawione

na początku pytania. Ograniczając się, ze względu na wspomniane podobieństwo, do podania jedynie zasadniczych wzorów i ostatecznych wyników można stwierdzić, że:

1. Przy analogicznych jak poprzednio założeniach co do rozważanego obszaru oraz co do stopnia regularności natężeń pól, dowolnie dane, spełniające układ równań makswellowskich (1) do (4), natężenia pól dadzą się wyrazić przez magnetyczny wektor Hertza \vec{H}^* za pomocą wzorów

$$\vec{E} = -\mu \nabla \times \vec{H}^*, \quad (24)$$

$$\vec{H} = \nabla (\nabla \cdot \vec{H}^*) - \varepsilon \mu \ddot{\vec{H}}^* = \nabla \times \nabla \times \vec{H}^*. \quad (25)$$

Magnetyczny wektor Hertza spełnia przy tym równanie

$$\nabla^2 \vec{H}^* - \varepsilon \mu \ddot{\vec{H}}^* = 0. \quad (26)$$

2. Każdemu wektorowi magnetycznemu Hertza, mającemu ciągle pochodne cząstkowe do trzeciego rzędu włącznie i spełniającemu równanie (26), odpowiada za pośrednictwem równań (24) i (25) pole elektromagnetyczne, spełniające układ równań makswellowskich (1) do (4).

3. Wektor magnetyczny Hertza związany z danym polem nie jest jednoznacznie określony: można mianowicie dołączyć do niego gradient funkcji skalarnej, posiadającej dostateczną liczbę ciągłych pochodnych spełniających równanie (23).

W przypadku założonego układu (1) do (6) równań makswellowskich obowiązuje zasada superpozycji ze względu na liniowość i jednorodność tego układu. Zatem, o ile oba wektory Hertza: elektryczny i magnetyczny spełniają odpowiednie równanie falowe, to pole elektromagnetyczne, wyrażone wzorami

$$\vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{H}) - \varepsilon \mu \ddot{\vec{H}} - \mu \nabla \times \dot{\vec{H}}^*, \quad (27)$$

$$\vec{H} = \varepsilon \nabla \times \dot{\vec{H}}^* + \nabla (\nabla \cdot \vec{H}^*) - \varepsilon \mu \ddot{\vec{H}}^*, \quad (28)$$

spełnia układ równań makswellowskich. Pole to można jednak, jak wiadomo, przy bardzo ogólnych założeniach zawsze wyrazić przez jeden tylko (elektryczny lub magnetyczny) wektor Hertza.

Pole wyrażone przez oba wektory nie jest więc w sposób istotny ogólniejsze od pola dającego się określić przez jeden tylko wektor.

3. WYRAŻANIE PÓL ELEKTROMAGNETYCZNYCH PRZEZ DWA WEKTORY HERTZA MAJĄCE TYLKO PO JEDNEJ SKŁADOWEJ

W tej części pracy dyskutowane będzie zagadnienie możliwości przedstawienia pola elektromagnetycznego za pomocą dwóch wektorów Hertza: elektrycznego i magnetycznego, takich że w całym obszarze jedna tylko

i ta sama dla obu wektorów ich składowa prostokątna kartezjańska może być różna od zera. Można na przykład przyjąć, że będzie to składowa skierowana wzdłuż osi z .

Pole elektromagnetyczne zostanie w ten sposób określone za pomocą jedynie dwóch funkcji liczbowych.

Jak już wspomniano, największe znaczenie praktyczne mają w technice radiowej i radiolokacyjnej pola elektromagnetyczne o określonej częstotliwości, to znaczy pola, których zależność od czasu da się zapisać w postaci $e^{-i\omega t}$.

Ograniczenie poniższych rozważań do tego rodzaju pól pozwala na znaczne ich uproszczenie; wydaje się jednak, że dla pól o ogólniejszej zależności od czasu dowód również dałby się przeprowadzić.

Do rozważanych zależności pewne uproszczenie wnosi również ograniczenie się do obszaru V (rys. 1), którego brzeg składa się z powierzchni walcowej W o tworzących równoległych do osi z oraz z dwóch płaskich ścianek S_1 i S_2 prostopadłych do tej osi. Przekrój obszaru V płaszczyzną prostopadłą do osi z jest obszarem jednospójnym.

Wskutek założonej zależności od czasu układ równań makswellowskich redukuje się do równań:

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\bar{\mathbf{E}}, \quad (29)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0, \quad (31)$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = i\omega\mu\bar{\mathbf{H}}, \quad (30)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{H}} = 0, \quad (32)$$

przy czym funkcje występujące w tych równaniach są od czasu niezależne. O funkcjach tych będzie nadal zakładane, że mają one w obszarze domkniętym V pochodne ciągłe do drugiego rzędu włącznie.

Związki między wektorami Hertza a polem elektromagnetycznym dzięki założonej zależności od czasu przybierają postać:

dla wektora elektrycznego

$$\bar{\mathbf{H}} = -i\omega\epsilon\nabla \times \bar{\Pi}, \quad (33)$$

dla wektora magnetycznego

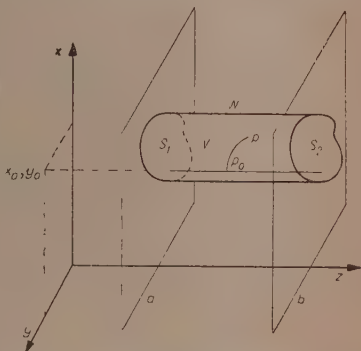
$$\bar{\mathbf{E}} = i\omega\mu\nabla \times \bar{\Pi}^*, \quad (35)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \nabla(\nabla \cdot \bar{\Pi}) + k^2\bar{\Pi} \quad (34)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \nabla(\nabla \cdot \bar{\Pi}^*) + k^2\bar{\Pi}^* \quad (36)$$

gdzie

$$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}. \quad (37)$$



Rys. 1. Obszar rozważany w twierdzeniu.

Elektryczny wektor Hertza, redukujący się do jednej tylko składowej prostokątnej kartezjańskiej

$$\vec{\Pi} = \vec{k} \Pi_z \quad (38)$$

(przy czym \vec{k} jest jednostkowym wektorem skierowanym wzdłuż osi z), wyznacza tak zwane pole poprzeczne magnetyczne, inaczej pole typu *TM*. Pole takie nie ma składowej pola magnetycznego w kierunku osi z . Stąd też bierze się nazwa takiego pola, która podkreśla, że wektory natężenia pola magnetycznego leżą w płaszczyźnie poprzecznej (prostopadłej) względem osi z .

Współrzędne natężeń pól otrzymuje się łatwo z poprzednio otrzymanych wzorów. Są one

$$E_x = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z \partial x}, \quad (39) \quad H_x = -i\omega\epsilon \frac{\partial \Pi_z}{\partial y}, \quad (42)$$

$$E_y = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z \partial y}, \quad (40) \quad H_y = i\omega\epsilon \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}, \quad (43)$$

$$E_z = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z, \quad (41) \quad H_z = 0. \quad (44)$$

Analogicznie magnetyczny wektor Hertza

$$-\vec{\Pi}^* = \vec{k} \Pi_z^* \quad (45)$$

wyznacza pole poprzeczne elektryczne (w skrócie *TE*) za pomocą wzorów:

$$H_x = \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z \partial x}, \quad (46) \quad E_s = i\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial y}, \quad (49)$$

$$H_y = \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z \partial y}, \quad (47) \quad E_y = -i\omega\mu \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial x}, \quad (50)$$

$$H_z = \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z^* \quad (48) \quad E_z = 0. \quad (51)$$

Nasuwa się teraz w sposób naturalny myśl dowodu polegająca na tym, aby dla danego pola elektromagnetycznego wyznaczyć:

- A. elektryczny wektor Hertza dany wzorem (38) tak, aby z -towa współrzędna pola elektrycznego przez niego wyznaczonego była równa z -towej współrzędnej danego pola elektrycznego;
- B. magnetyczny wektor Hertza dany wzorem (45) tak, aby z -towa współrzędna pola magnetycznego przez niego wyznaczonego była równa z -towej współrzędnej danego pola magnetycznego.

Po odjęciu od danego pola elektromagnetycznego pól wyznaczonych przez elektryczny i magnetyczny wektor Hertza pozostanie, jak widać,

co najwyżej pole bez z -towych składowych natężeń pól, tak zwane pole typu *TEM*. Pole takie, jak zostanie dalej wykazane, da się wyrazić przez jeden tylko, na przykład elektryczny wektor Hertza dany wzorem (38).

Ponieważ zadania wyznaczenia elektrycznego wektora Hertza (A) i magnetycznego (B) są niezależne od siebie i prawie identyczne, w pracy tej będzie analizowane jedynie pierwsze.

Chodzi o wyznaczenie funkcji $\Pi_z(x, y, z)$ spełniającej równocześnie dwie zależności

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = E_z, \quad (41)$$

gdzie E_z jest daną funkcją trzech zmiennych x, y, z oraz

$$\nabla^2 \Pi_z + k^2 \Pi_z = 0. \quad (52)$$

Równanie (52) musi być spełnione, gdyż wtedy dopiero wyznaczone za pomocą wektora Hertza natężenia pola spełniają równania maxwellowskie i może być zastosowane opisane poprzednio postępowanie. Nieuwzględnienie tego w dowodzie stanowi błąd Schelkunoffa w cytowanym podręczniku [7].

O funkcji \bar{E} wiadomo, że spełnia ona układ równań (29) do (32) i posiada ciągle pochodne cząstkowe do drugiego rzędu włącznie. Wskutek tego przez wyrugowanie \bar{H} z tego układu równań można otrzymać

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0, \quad (53)$$

co bezpośrednio daje potrzebną dalej zależność dla E_z

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0. \quad (54)$$

Reasumując należy dla rozwiązania problemu (A) wykazać, że można znaleźć taką funkcję Π_z , że

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = E_z, \quad (41)$$

oraz Π_z jest rozwiązaniem równania Helmholtza

$$\nabla^2 \Pi_z + k^2 \Pi_z = 0, \quad (52)$$

przy czym o funkcji E_z wiadomo, że spełnia ona równanie (54).

Zostanie wzięta teraz pod uwagę transformacja Laplace'a funkcji E_z względem zmiennej z

$$\eta(x, y, p) = \int_0^{\infty} e^{-pz} E_z dz. \quad (55)$$

Zakłada się przy tym, że poza obszarem V funkcja E_z znika i że układ współrzędnych został wybrany tak, że współrzędna ścianki S_1 równa a jest większa od zera.

Stąd wynika, zgodnie z rys. 1

$$\eta = \int_a^b e^{-pz} E_z dz, \quad (56)$$

Transformacja równania (54) daje:

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} + (p^2 + k^2) \eta + e^{-bp} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} + p E_z \right)_{z=b} - e^{-ap} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} + p E_z \right)_{z=a} = 0, \quad (57)$$

gdzie przez η_{xx} i η_{yy} oznaczono odpowiednie pochodne cząstkowe funkcji η . Równają się one transformatom funkcji

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \text{ i } \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}$$

$p^2 \eta$ wraz z dwoma ostatnimi składnikami daje transformatę funkcji równej

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

wewnątrz obszaru V i równej 0 poza tym obszarem.

Łatwo można wykazać, że wszystkie funkcje występujące w równaniu (57) są funkcjami całkowitymi zmiennej p .

O ile jakaś funkcja Π_z ciągła wraz z pochodnymi do drugiego rzędu włącznie w obszarze domkniętym V spełnia wewnątrz tego obszaru zależność (41), a poza obszarem V jest równa zeru, to ma ona transformatę ϱ spełniającą tożsamościowo równanie

$$(p^2 + k^2) \varrho + e^{-bp} [\beta'(x, y) + \beta(x, y)p] - e^{-ap} [\alpha'(x, y) + \alpha(x, y)p] \equiv \eta, \quad (58)$$

przy czym dwa ostatnie składniki lewej strony równania powstają na skutek ewentualnych nieciągłości funkcji Π_z i $\frac{\partial \Pi_z}{\partial z}$ na brzegu obszaru V .

Stąd wynika, że ϱ da się wyrazić wzorem

$$\varrho = \frac{\eta}{p^2 + k^2} + e^{-ap} \frac{\alpha' + \alpha p}{p^2 + k^2} - e^{-bp} \frac{\beta' + \beta p}{p^2 + k^2}. \quad (59)$$

Formuła (59) dostarcza ciekawych informacji o funkcji ϱ . Rozpatrzmy ją dla ustalonych wartości x_0, y_0 zmiennych x, y . Pierwszy składnik jest transformatą spłotu funkcji E_z i $\frac{1}{k} \sin kz$

$$\frac{1}{k} \int_0^z E_z(x_0, y_0, \zeta) \sin k(z - \zeta) d\zeta; \quad (60)$$

spełnia on, jak łatwo sprawdzić, równanie (41) w dowolnym punkcie przestrzeni również poza obszarem V . Dla $z < a$ jest on równy zeru, dla $z > b$ ma postać

$$A(x, y) \sin[kz + B(x, y)]. \quad (61)$$

Dwa pozostałe składniki ϱ są transformatami funkcji równych zeru odpowiednio dla $z < a$ i $z > b$, a dających się przedstawić dla pozostałych z w postaci (61) o fazie i amplitudzie odpowiedniej dla każdego składnika.

Zostanie teraz wykazane, że dwoma tymi składnikami, które wolno przyjąć dowolnie ze względu na równanie (41), można tak rozporządzić, że będzie spełnione również równanie (52) i że funkcja Π_z będzie znikać poza obszarem V . Składniki te można przyjąć dowolnie, gdyż funkcje typu (61) spełniają jednorodne równanie odpowiadające równaniu (41), a mianowicie:

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = 0. \quad (62)$$

Reasumując, wyrażenie (59) przy dowolnych $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, określa transformatę funkcji spełniającej równanie (41) w całej przestrzeni z wyjątkiem ewentualnie powierzchni S_1 i S_2 .

Równanie (52) można przy uwzględnieniu równania (41) zastąpić równaniem

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y^2} = -E_z. \quad (63)$$

O ile funkcje $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ mają drugie ciągłe pochodne cząstkowe względem x i y , to wtedy zarówno funkcja ϱ , jak i wyznaczona przez nią Π_z mają ciągłe drugie pochodne cząstkowe względem tych samych zmiennych, oraz ϱ_{xx} i ϱ_{yy} są odpowiednio transformatami $\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y^2}$.

Zatem na to, aby było spełnione równanie (63) wystarcza, by

$$\varrho_{xx} + \varrho_{yy} = -\eta \quad (64)$$

lub, biorąc pod uwagę wyrażenie (59),

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 + k^2} \left\{ \eta_{xx} + \eta_{yy} - e^{-bp} [\beta'_{xx} + \beta'_{yy} + (\beta_{xx} + \beta_{yy})p] + \right. \\ \left. + e^{-ap} [\alpha'_{xx} + \alpha'_{yy} + (\alpha_{xx} + \alpha_{yy})p] + (p^2 + k^2)\eta \right\} = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Z tożsamości (57) wynika, że równanie (65) będzie spełnione, o ile będą spełnione równania:

$$\alpha_{xx} + \alpha_{yy} = -(E_z)_{z=a}, \quad (66) \quad \beta_{xx} + \beta_{yy} = -(E_z)_{z=b}, \quad (67)$$

$$\alpha'_{xx} + \alpha'_{yy} = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{z=a}, \quad (66') \quad \beta'_{xx} + \beta'_{yy} = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{z=b}. \quad (67')$$

Równania powyższe mają rozwiązania dwukrotnie w sposób ciągły różniczkowalne, co zasadniczo stanowi rozwiązanie przedstawionego problemu.

Wyznaczona w ten sposób funkcja Π_z nie musi jednak znikać dla $z > b$ (dla $z < a$ funkcja ta znika, ponieważ wszystkie trzy składniki tej funkcji znikają), a jak wynika z równania (63), musi tylko spełniać równanie

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y^2} = 0. \quad (68)$$

Wybór właściwych szczególnych całek równań (67) może zapewnić — jak można wykazać — znikanie funkcji Π_z dla $z > b$.

Interesujące jest, że odpowiednie funkcje $\beta(x, y)$ i $\beta'(x, y)$ można wyznaczyć w ogóle bez rozwiązywania równań (67) w sposób algebraiczny.

Gdy a i a' zostały już z równań (66) wyznaczone, w obszarze V spełnione jest równanie (52), ponieważ na wartości funkcji Π_z w tym obszarze wartości β i β' wpływu nie mają.

Funkcja Π_z przyjmuje w punktach o współrzędnej $z = b_1$ większej od b wartości:

$$\Pi_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{b_1 p} [\eta + e^{-ap}(a' + ap) - e^{-bp}(\beta' + \beta p)]}{p^2 + k^2} dp; \quad \gamma > 0 \quad (69)$$

Funkcja podcałkowa jest ilorazem funkcji całkowitej p przez $p^2 + k^2$, poza tym, jak zostanie niżej wykazane, funkcja ta zmierza jednostajnie do zera w półpłaszczyźnie $\text{Re}(p) \leq \gamma$. Dlatego też na podstawie twierdzeń Cauchy i Jordana Π_z równa się sumie residuów w punktach $p = ik$ oraz $p = -ik$.

Przez stosowny wybór β i β' można zawsze uczynić te residua równymi zeru. Wystarczy w tym celu przyjąć za β i β' rozwiązania układu równań

$$\begin{aligned} ik\beta + \beta' &= e^{b_1 k} \eta(ik) + e^{(b-a)ik}(ika + a') \\ -ik\beta + \beta' &= e^{-b_1 k} \eta(-ik) + e^{-(b-a)ik}(-ika + a') \end{aligned} \quad (70)$$

o wyznaczniku $2ik \neq 0$.

Aby wykazać, że funkcja podcałkowa zmierza do zera w półpłaszczyźnie $\text{Re}(p) \leq \gamma$, wystarczy to wykazać dla pierwszego składnika, ponieważ dla dwóch pozostałych ze względu na $b_1 > b > a$ jest to oczywiste.

Weźmy pod uwagę zależność

$$\eta(x, y, p) = \int_a^b e^{-pz} E_z(x, y, z) dz = e^{-bp} \int_0^{b-a} e^{p\zeta} E_z(x, y, b-\zeta) d\zeta, \quad (71)$$

przy czym zastosowano podstawienie $z = b - \zeta$. Po pomnożeniu obu stron przez e^{bp} i oznaczeniu pod całką $p = -p_1$ otrzymuje się

$$\eta(x, y, p)e^{bp} = \int_a^{b-a} e^{-p_1 \zeta} E_z(x, y, \zeta - b) d\zeta. \quad (72)$$

Prawa strona tego równania przedstawia transformację Laplace'a absolutnie zbieżną dla dowolnego p_1 , a zatem otrzymana w ten sposób funkcja zmierza jednostajnie do zera w całej półpłaszczyźnie $\operatorname{Re}(p_1) \geq -\gamma$ lub $\operatorname{Re}(p) \leq \gamma$, gdzie γ jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Przed przejściem do ostatniej fazy dowodu, zawierającej przedstawienie pola typu *TEM* przez skierowany wzdłuż osi z wektor Hertza, wypada zwrócić uwagę na stopień regularności wyznaczonego dotychczas wektora Hertza.

W poprzedniej części pracy podano — oprócz spełniania przez wektor Hertza odpowiedniego równania różniczkowego — ciągłość jego pochodnych do trzeciego rzędu włącznie jako układ warunków dostatecznych dla spełniania przez pole elektromagnetyczne równań makswellowskich. Powyższy układ warunków jest, niestety, zbyt silny na to, aby mógł być tutaj zastosowany i trzeba skorzystać ze szczególnej postaci związków (39) do (44) między polem elektromagnetycznym a wektorem Hertza o jednej składowej.

Ze związków (39) do (44) wynika, że pole elektromagnetyczne będzie miało ciągle pochodne cząstkowe i będzie spełniało układ równań makswellowskich, o ile funkcje Π_z i $\frac{\partial \Pi_z}{\partial z}$ będą posiadały pochodne cząstkowe względem zmiennych x, y, z ciągle do drugiego rzędu włącznie. Warunki te są spełnione, co można wykazać opierając się na zależnościach (59) i (60) oraz na istnieniu ciągłych pochodnych do drugiego rzędu włącznie funkcji: $E(x, y, z)$ oraz $a(x, y), a'(x, y), \beta(x, y), \beta'(x, y)$.

Uwaga: Na tej samej podstawie można wykazać istnienie drugich ciągłych pochodnych cząstkowych funkcji $\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2}$.

Obecnie pozostało już tylko wykazać, że pole elektromagnetyczne bez składowych w kierunku osi z (pole typu *TEM*) da się także wyrazić w pożądanym sposób, to znaczy przez wektor Hertza o jednej tylko składowej z -tovej.

Równania Maxwella, w przypadku gdy $E_z = H_z = 0$, prowadzą do uproszczonego układu zależności:

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega E_x, \quad (73) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = -i\omega E_y, \quad (74)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0, \quad (75)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y, \quad (78)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0, \quad (76)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \quad (79)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu H_x, \quad (77)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \quad (80)$$

Zostaje teraz określony elektryczny wektor Hertza, mający jedną tylko różną od zera współrzędną prostokątną kartezjańską

$$\Pi_z(x, y, z) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \int_{P_0(x_0, y_0, z)}^{P(x, y, z)} H_y dx - H_x dy; \quad (81)$$

liczby x_0, y_0 nie zależą od z i mają tę własność, że punkt $P_0(x_0, y_0, z)$ należy dla $a < z < b$ do obszaru V . Droga całkowania leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi z . Definicja (81) jest poprawna, ponieważ wynik całkowania po krzywej należącej do obszaru V i łączącej punkty P_0 i P nie zależy na podstawie równania (76) od wyboru tej krzywej.

Z równań (42), (43), (44) wynika bezpośrednio, że określony wektor Hertza wyznacza właściwe wartości natężenia pola magnetycznego.

Różniczkowanie zależności (81) względem z przy uwzględnieniu równań (73), (74) daje

$$\frac{\partial \Pi_z}{\partial z} = \int_{P_0}^P E_x dx + E_y dy; \quad (82)$$

różniczkowanie pod znakiem całki jest dozwolone, otrzymana całka nie zależy bowiem od wyboru drogi na skutek zależności (79).

Z równania (82) oraz równań (39) i (40) wynika, że wektor Hertza wyznacza właściwe wartości współrzędnych E_x i E_y . Aby udowodnić, że współrzędna E_z znika, należy z kolei zróżniczkować równanie (82) względem z uwzględniając równocześnie związki (77), (78). Równanie (41) prowadzi wtedy do żądanej odpowiedzi. Przy powyższych rozważaniach w ostatniej fazie dowodu korzystano jedynie z ciągłości pierwszych pochodnych natężeń pól, która po redukcji pola do pola typu TEM jest zapewniona.

4. UWAGI NA TEMAT STOSOWANYCH TWIERDZEŃ Z ANALIZY WEKTOROWEJ

Zagadnienia dotyczące analizy wektorowej zostały wydzielone z pracy niniejszej ze względu na to, że nie są one bezpośrednio związane z poruszonymi w poprzednich częściach problemami i mogłyby powodować za-

ciemnienie ogólnego toku rozważań, jak również ze względu na to, że wydzielenie to pozwala na pozostawienie pewnej dowolności w wyborze stosowanych założeń, w miarę korzystania z tak czy inaczej sprecyzowanych twierdzeń z analizy wektorowej, zależnie od potrzeb zastosowań.

W powyższej pracy podstawową rolę grają twierdzenia o przedstawianiu bezwirowych funkcji wektorowych w postaci gradientu funkcji skalarnych i funkcji bezźródłowych w postaci rotacji funkcji wektorowych.

Pierwsze z tych zagadnień jest prostsze i wyczerpująco przedstawione na przykład w drugim tomie podręcznika wyższej matematyki W. Smirnowa [5].

Na to mianowicie, aby w pewnym obszarze funkcję wektorową można było wyrazić przez gradient funkcji skalarnej, wystarczy, aby w tym obszarze:

- funkcja ta była ciągła wraz z pierwszymi pochodnymi,
- rotacja tej funkcji znikająca,
- obszar miał tę własność, że na każdym konturze należącym do tego obszaru można rozpiąć powierzchnię również do tego obszaru należącą (mówi się tu o konturach i powierzchniach dostatecznie regularnych na to, aby można było stosować do nich twierdzenie Stokesa).

Funkcję skalarną da się w powyższym przypadku tak dobrać, aby posiadała ona drugie pochodne cząstkowe ciągłe.

Drugie z powyżej wymienionych zagadnień, dotyczące funkcji bezźródłowych, bywa ujmowane rozmaicie. Przytoczone tu zostaną dwa podejścia, nadające się do zastosowania w przedłożonej pracy.

Niech dana będzie funkcja wektorowa

$$\bar{f} = iX(x, y, z) + jY(x, y, z) + kZ(x, y, z); \quad (83)$$

gdzie x, y, z oznaczają współrzędne punktu, a i, j, k wektory jednostkowe w pewnym układzie współrzędnych kartezjańskich prostokątnych. Funkcja ta jest określona i ma ciągłe pochodne cząstkowe w pewnym obszarze V . W obszarze tym ma miejsce również zależność

$$\nabla \cdot \bar{f} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0; \quad (84)$$

chodzi teraz o znalezienie funkcji \bar{g} takiej, że

$$\nabla \times \bar{g} = \bar{f}. \quad (85)$$

R. Courant [1] w swoim podręczniku rachunku różniczkowego i całkowego rozwiązuje to zagadnienie dla obszaru będącego równoległościannem. Otrzymuje on funkcję \bar{g} spełniającą równanie (85) i mającą jedną współrzedną tożsamościowo równą zeru. Dwie pozostałe współrzedne mają

ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe. W przypadku, gdy o funkcji \bar{f} założymy, że ma ona ciągłe i drugie pochodne cząstkowe, wyznaczona powyższą metodą funkcja \bar{g} będzie również miała drugie pochodne cząstkowe ciągłe.

Metoda ta da się rozciągnąć także na bardziej ogólne postacię obszarów, co jednak bliżej nie będzie tu omawiane.

Inną metodę podaje N. Koczin [3] w podręczniku rachunku wektorowego. Metoda ta odnosi się w zasadzie do obszarów pozwalających na rozwiązanie zewnętrznego problemu Neumanna dla równania Laplace'a. Zawiera ona interesujący pomysł polegający na uzupełnieniu danego pola wektorowego \bar{f} do całej przestrzeni przy zachowaniu ciągłości składowych normalnych. Pozwala ona przy danym polu \bar{f} , mającym ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe, wyznaczyć pole \bar{h} mające ciągłe drugie pochodne i spełniające zależność

$$\nabla \times \nabla \times \bar{h} = \bar{f}. \quad (86)$$

Oczywiście, funkcję \bar{g} spełniającą zależność (85) można w tym przypadku określić równaniem

$$\nabla \times \bar{h} = \bar{g}. \quad (87)$$

Omówione tutaj twierdzenia o istnieniu z analizy wektorowej mają wszystkie charakter konstruktywny, to znaczy w dowodzie tych twierdzeń podana jest metoda prowadząca do jednoznacznego wyznaczenia funkcji mającej pożądane właściwości.

Oprócz powyższych twierdzeń stosowane są również w pracy twierdzenia typu

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0, \quad (88)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{a}) = 0, \quad (89)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{a} = \nabla(\nabla \cdot \bar{a}) - \nabla^2 \bar{a}. \quad (90)$$

Twierdzenia te zachodzą, gdy równe są pochodne mieszane różniące się kolejnością różniczkowania (pochodne drugiego rzędu) występujących w nich funkcji. Wystarczy więc, aby funkcje te były wraz ze swoimi pochodnymi do drugiego rzędu włącznie w rozważanym obszarze ciągłe.

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej

Instytutu Podstawowych Problemów Techniki

WYKAZ LITERATURY

1. Courant R. — Differential and integral calculus. London 1949.
2. Doetsch G. — Handbuch der Laplace Transformation. Basel 1950.
3. Koczin N. K. — Wektornoje isczyislenije i naczala tenzornowo isczyislenija. Moskwa 1951.

4. Kellog C. D. — Foundations of potential theory. Berlin 1929.
5. Smirnow W. I. — Kurs wysszej matematiki. Leningrad 1950.
6. Stratton J. A. — Electromagnetic theory. New York 1941.
7. Schelkunoff S. A. — Electromagnetic waves. New York 1943.

К. БОХЕНЭК

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СВЯЗАННЫЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВЕКТОРОВ ГЕРЦА

Резюме

Основную часть статьи составляют теоремы из области теории электромагнитного поля. Первая из этих теорем занимается общим характером метода выражения электромагнитного поля одним только (электрическим или магнитным) вектором Герца. Вторая теорема занимается общим характером метода выражения электромагнитного поля двумя векторами Герца, имеющими по одной только декартовой прямоугольной составляющей причём обе эти составляющие коллинеарны.

В случае первой теоремы положено, что дано электромагнитное поле в области позволяющей применять теоремы векторного анализа о представлении безвихревого поля градиентом скалярной функции и поля не имеющего ни источников ни стоков — ротацией векторной функции. В статье обсуждается особый вид этих теорем, использованный при доказательстве. Кроме того положено, что электромагнитное поле имеет непрерывные вторые производные по отношению к координатам и что оно дифференцируемо вместе с этими производными любое число раз по отношению к времени без нарушения непрерывности. Относительно этого поля положено также, что оно удовлетворяет системе уравнений Максвелла в виде

$$\nabla \times \vec{E} + \mu \dot{\vec{H}} = 0, \quad (1) \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0; \quad (3) \quad \epsilon = \text{const}$$

$$\nabla \times \vec{H} - \epsilon \dot{\vec{E}} = 0, \quad (2) \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (4) \quad \mu = \text{const.}$$

Доказательство состоит в указании способа конструкции вектора Герца (электрического или магнитного), определяющего данное электромагнитное поле при помощи известных зависимостей и удовлетворяющего волновому уравнению. Доказательство проведено способом обыкновенно применяемым при введении вектора Герца, однако не столь формально, как в известных автору из литературы примерах; кроме того при доказательстве постоянно обращается внимание на условия существования конструированных функций.

В результате — при довольно общих определённых выше положениях мы получаем, что каждое электромагнитное поле может быть выражено одним только (электрическим или магнитным) вектором Герца.

Для случая второй вышеприведенной теоремы, ограничения относительно области и принимаемого во внимание электромагнитного поля несколько больше.

Положено, что область ограничена цилиндрической поверхностью и двумя перпендикулярными к производящим плоскими стенками. Сечение области плоскостью перпендикулярной к производящим является односвязной областью. Относительно электромагнитного поля положено, что зависимость его от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$, и что оно имеет вторые производные, непрерывные относительно координат. Затем принята система прямоугольных декартовых координат с осью z параллельною производящим поверхности цилиндра. Доказательство состоит в том, что определяются два вектора Герца (электрический и магнитный), имеющих только со-

ставляющую z и определяющих электромагнитные поля, которых сумма равна рассматриваемому полю.

Так как электрический вектор Герца выражает поле типа TM , а магнитный типа — TE , то естественно возникает мысль следующего доказательства:

- А. определить электрический вектор Герца таким образом, чтобы определяемая им координата z электрического поля была равна координате z данного поля.
- В. подобным образом определить магнитный вектор Герца с помощью координаты z данного магнитного поля.
- С. другое, предположительно, поле типа TEM выразить при помощи одного из двух векторов Герца, имеющих также только составляющую z .

Решение задач А и В требует определения двух функций Π_z и Π_z^* (координаты векторов Герца), каждая из которых удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям, а именно:

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = E_z, \quad (5) \quad \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z^* = H_z, \quad (7)$$

$$\nabla^2 \Pi_z + k^2 \Pi_z = 0, \quad (6) \quad \nabla^2 \Pi_z^* + k^2 \Pi_z^* = 0, \quad (8)$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu.$$

Известно при этом, что координаты напряжённости полей E_z и H_z удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0, \quad (9)$$

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \quad (10)$$

Если векторы Герца удовлетворяют уравнениям (6) и (8) то и определённые ими электромагнитные поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, а следовательно и остальное после вычета этих полей поле типа TEM тоже удовлетворит этим уравнениям.

Схожее с вышеприведенным доказательство даёт Шелкунов в книге под заглавием „Elektromagnetic waves“; однако же ввиду неучтения уравнений обозначенных здесь (6) и (8) доказательство это не корректно.

Представленное здесь доказательство состоит в применении к уравнению (5) или же (7) — трансформации Лапласа: из чего получается, что семейство трансформат функций удовлетворяющих уравнению (5) или (7) может быть представлено в виде, содержащем любые две функции переменных x и y . Учитывая связь, даваемую трансформацией уравнения (9) или (10) мы получим, что эти две функции могут быть подобраны таким образом, чтобы удовлетворено было уравнение (6) или (8).

Для окончания доказательства следует ещё выразить поле типа TEM соответственным вектором Герца (задача С), что не представляет особых затруднений и что исполнено в настоящем труде.

K. BOCHENEK

SOME PROBLEMS RELATED TO THE APPLICATION OF HERTZIAN VECTORS

Summary

The main part of this paper consists of two theorems concerning the electromagnetic field theory.

The first of these theorems deals with the generality of the method describing the electromagnetic field by one Hertzian vector only (electrical or magnetical).

The second theorem deals with the general scope of the method describing the electromagnetic field by two Hertzian vectors having each a rectangular component, both of these components being collinear.

It is assumed in the first theorem that an electromagnetic field is given in the domain in which can be applied the vector analysis theorems expressing the field by means of the gradient of a scalar function and by the curl of a vector function. The special forms of these theorems used in the proof have been discussed in this paper. Next, it is assumed that the electromagnetic field has continuous derivatives of the second order with respect to coordinates and together with these derivatives can be differentiated with respect to time any number of times without introducing a discontinuity, and moreover satisfies Maxwell's equations;

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{E} + \mu \dot{\bar{H}} &= 0, \quad (1) & \nabla \cdot \bar{H} &= 0, \quad (3) & \epsilon &= \text{const}, \\ \nabla \times \bar{H} - \epsilon \dot{\bar{E}} &= 0, \quad (2) & \nabla \cdot \bar{E} &= 0, \quad (4) & \mu &= \text{const}. \end{aligned}$$

The proof consists in constructing the Hertzian vector (electrical or magnetical) which determines the given electromagnetic field with the aid of known relations and satisfies the wave-equation. The method of proving is similar to that commonly used when introducing the Hertzian vector. However, the analysis is not as formal as in literature known to the author; especial attention is paid to the conditions of existence of the constructed functions.

As a result of the above general assumptions the electromagnetic field can be determined by means of only one Hertzian vector (electrical or magnetical).

In the case of the second theorem the domain and electromagnetic field limitations are greater. It is assumed that the space is enclosed by a cylindrical surface and two plains perpendicular to its generating line.

The cross-section of the domain with a plain perpendicular to the generating lines is the simply-connected domain. It is assumed that the electromagnetic field as a function of time, has the form $e^{-i\omega t}$, and that it has continuous second order derivatives with respect to the coordinates. Next a rectangular coordinates system has been chosen with the z -axis parallel to the generating lines of the cylindrical surface. The proof consists in deducing two Hertzian vectors (electrical and magnetical) each having only one z -component, and describing the electromagnetic fields, whose sum is equivalent to the field under consideration.

As the electrical Hertzian vector determines the fields of the TM -type and the magnetic one — of the TE -type, the following method of proving suggests itself:

- A. to compute the electrical Hertzian vector in such a way that the z -component of the electrical field determined by it is equal to the z -component of the given field.
- B. to compute similarly the magnetical Hertzian vector by means of the z -component of the given magnetic field.
- C. to compute any remaining field of the TEM -type by means of one of the two Hertzian vectors which also has one component only.

The solution of problems A and B requires calculation of two functions Π_z and Π_z^* (components of the Hertzian vectors) each satisfying two differential equations, viz.:

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = E_z, \quad (5) \qquad \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z^* = H_z, \quad (7)$$

$$\nabla^2 \Pi_z + k^2 \Pi_z = 0, \quad (6) \qquad \nabla^2 \Pi_z^* + k^2 \Pi_z^* = 0 \quad (8)$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu.$$

It is known that the components of the field-strengths E_z and H_z satisfy the differential equations:

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \quad (9)$$

and

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \quad (10)$$

respectively.

The satisfying of equations (6) and (8) by the Hertzian vectors ensures that the electromagnetical fields determined by these vectors satisfy Maxwell's equations, and therefore, the remaining field of the *TEM*-type which results from subtracting the two above mentioned fields, also satisfies Maxwell's equations.

A similar proof has been given by Schelkunoff in his book „Electromagnetic Waves“, nevertheless the proof is not correct due to disregarding equations (6) and (8).

The proof presented in this paper is based on applying the Laplace-transformation to equation (5) or (7). This results in obtaining a family of transformed functions satisfying equation (5) or (7), which can be represented in a form containing any two arbitrary functions of variables x and y .

In view of the relation given by the transformation of equation (9) or (10) respectively it appears that the two arbitrary functions can be chosen such as to satisfy equation (6) or (8).

The field of the *TEM*-type has yet to be determined by an adequate Hertzian vector (problem C) in order to complete the proof. This is not difficult and has been done in this paper.

621.396.611.1

J. GROSZKOWSKI

Okres granicznego cyklu drgania nieliniowego

Rękopis dostarczono 21. 9. 1954

Podano dwie postacie wzorów na okres granicznego cyklu drgania nieliniowego dla wszelkich wartości parametru przy drugim wyrazie równania tego drgania; wzory dają bardzo dobrą zgodność ze wzorami, które zostały otrzymane metodami przybliżonymi dla krańcowych zakresów wartości tego parametru.

1. WSTĘP

Znana jest pewna liczba prac dotyczących rozwiązania równania nieliniowego drgań

$$\ddot{x} + \nu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (1)$$

w odniesieniu do amplitudy i okresu cyklu granicznego dla skrajnych wartości parametru ν , tzn. bądź dla małych jego wartości (przebiegi prawie sinusoidalne [1], [2], [5], [9]), bądź dla dużych jego wartości (przebiegi bardzo odkształcone [4], [8]). Również istnieją usiłowania¹ otrzymania rozwiązania dla wszelkich wartości ν [9]. Jednakże otrzymane wyrażenia są raczej skomplikowane, gdyż mają bądź postać szeregow potęgowych, nie zawsze szybko zbieżnych, bądź wyrażen asymptotycznych, a więc nie są dogodne do obliczeń, a zwłaszcza do dyskusji.

Jeśli chodzi o wyrażenie na okres drgania dla wszelkich wartości ν to istnieje stosunkowo prosty wzór empiryczny [11], [12]; jednak wzór ten dla wartości $\nu \leq 0,5$, tj. w zakresie pracy prawie sinusoidalnej generatora, daje znaczne błędy, zwłaszcza jeśli chodzi o zdanie sobie sprawy z wartości odchylenia okresu drgań w stanie pracy prawie liniowej od wartości w stanie pracy liniowej (tzn. przy odchodzeniu od granicy powstawania drgań).

Ostatnio zaproponowano [5] sposób określenia okresu dla wszelkich wartości ν przez wykreślne połączenie odcinków dwóch krzywych: jednej — odnoszącej się do zakresu mniej więcej $0 < \nu < 1$, drugiej — do zakresu mniej więcej $7 < \nu < \infty$. Jako pierwszą krzywą przyjęto rozwiązanie dla

¹ Patrz krytykę pracy [9] w [3].

małych amplitud, jako drugą — rozwiązanie asymptotyczne Dorodnycyna [4].

W niniejszej pracy podano dwie postacie wzorów na okres granicznego cyklu równania (1) w zakresie $0 < \nu < \infty$. Wzory są stosunkowo proste i dogodne do dyskusji, a zgodność ich z innymi, najbardziej słusznymi wzorami, jest dostatecznie dobra.

Kształt wzorów ustalono w oparciu o wyniki rozważań zasady równowagi urojonej mocy harmoniczných, a następnie dobrano współczynnik na podstawie warunków krańcowych.

2. OGÓLNA POSTAĆ WYRAŻENIA NA OKRES

Dla obwodu rezonansowego LCR, pobudzanego dowolnym oporem ujemnym, można [6] w stanie ustalonym napisać warunek

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{Im}\{Z_k\} n_k^2 = 0. \quad (2)$$

Tutaj Z_k jest impedancją obwodu dla częstotliwości $k\omega$, k jest rzędem harmoniczných, ω pulsacją podstawową, $n_k = I_k : I_1$ — zawartością harmoniczných prądowej rzędu k , $\operatorname{Im}\{Z_k\}$ oznacza reaktancję impedancji Z_k , a mianowicie

$$\operatorname{Im}\{Z_k\} = k\omega L - \frac{1}{k\omega C}.$$

Zatem warunek (2) może być napisany jako

$$\omega L \sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2 - \frac{1}{\omega C} \sum_{k=1}^{\infty} n_k^2 = 0. \quad (3)$$

Po oznaczeniu $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ i wzięciu pod uwagę, że dla $k=1$ jest $n_1=1$, z równania (3) można otrzymać zależność

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} k^2 n_k^2\right) : \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} n_k^2\right)}. \quad (4)$$

Ponieważ $\sum_{k=2}^{\infty} n_k^2$ jest dużo mniejsza od jednośc, przeto (4) przechodzi w

$$\frac{T_1}{T_0} \approx \sqrt{\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} k^2 n_k^2\right) \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} n_k^2\right)} = \sqrt{1 + F(n_k^2)}, \quad (5)$$

gdzie $F(n_k^2)$ jest pewną funkcją kwadratów zawartości harmoniczných.

Możemy przyjąć, że funkcja $F(n_k^2)$ jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do kwadratu dobroci obwodu odtłumionego Q_r , a mianowicie

$$F(n_k^2) = \frac{a}{Q_r^2},$$

przy czym a jest współczynnikiem proporcjonalności, który w pewnym stopniu zależy od stanu pracy układu.

Jak wiadomo (np. [7]), między dobrocią Q_r obwodu odtłumionego a współczynnikiem ν w równaniu (1) istnieje zależność

$$Q_r = \frac{1}{r-R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\nu},$$

Co się tyczy stanu pracy układu, jest on określony tylko przez wielkość ν , czyli

$$a = a(\nu).$$

Zatem równanie (5) sprowadza się do równania

$$\frac{T_1}{T_0} = [1 + a(\nu) \cdot \nu^2]^{1/2}. \quad (6)$$

3. WARUNKI KRAŃCOWE

Kształt funkcji $a(\nu)$ oraz jej wartości spróbujemy określić na podstawie warunków krańcowych, to znaczy dla drgań prawie sinusoidalnych oraz dla drgań relaksacyjnych.

Dla drgań prawie sinusoidalnych jest $n_k \Big|_{k=2}^{\infty} \ll 1$, a przeto równanie (5) można przedstawić w postaci

$$\frac{T_1}{T_0} = [1 + \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1) n_k^2]^{1/2}. \quad (7)$$

W drganiu prawie sinusoidalnym, zachodzącym w obwodzie pobudzonym oporem ujemnym kształtu

$$u = -ri + \frac{1}{3} ri^3, \quad (8)$$

dla którego jest właśnie słuszne równanie (1), występuje w pierwszym przybliżeniu trzecia harmoniczna; można wykazać [7], iż jej zawartość prądowa wyraża się przez

$$n_3 = \frac{1}{8Q_r} = \frac{1}{8} \nu. \quad (9)$$

Po uwzględnieniu zależności (9) oraz przyjęciu $k=3$ w równaniu (7), otrzymamy

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + \frac{1}{8} \nu^2 \right]^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{16} \nu^2, \quad (10)$$

co daje dla małych wartości ν wartość współczynnika

$$a_{\nu \approx 0} = \frac{1}{8}.$$

Otrzymany wynik jest zgodny z wynikiem Fishera [5], który dla małych ν otrzymał wyrażenie

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 + \frac{1}{16} \nu^2 - \frac{5}{3072} \nu^4 + \dots \approx 1 + \frac{1}{16} \nu^2. \quad (11)$$

Również rozwiązanie Shohata [8]

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\nu} \left[\frac{\nu}{1+\nu} + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 + \frac{15}{16} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^3 + \frac{13}{16} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^4 + \dots \right] \quad (12)$$

dla $\nu^2 \ll 1$ może być sprowadzone do postaci

$$\frac{T_1}{T_0} \approx 1 + \frac{1}{16} \nu^2. \quad (13)$$

Oczywiście wyniki te są zgodne z podstawowym rozważaniem Appletona i Greavesa [2].

Dla drgań relaksacyjnych, a więc dla ν dostatecznie dużych wobec jedności, Dorodnicyn [4] otrzymał wyrażenie

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \left[1,6137\nu + 7,0143\nu^{-\frac{1}{3}} - \frac{22}{9} \frac{\ln \nu}{\nu} + 0,0078\nu^{-1} + O(\nu^{-\frac{4}{3}}) \right], \quad (14)$$

w którym $O(\nu^{-\frac{4}{3}})$ jest funkcją dążącą do zera ze wzrostem ν jak $\nu^{-\frac{4}{3}}$.

Ze względu na wyraz $O(\nu^{-\frac{4}{3}})$ wydaje się, iż stosowalność wzoru (14) jest ograniczona mniej więcej do $\nu > 7$.

Dla $\nu \gg 1$ wyrażenie (14) może być uproszczone przez pominięcie ostatnich trzech wyrazów i wprowadzenie częściowo równoważającej poprawki w wyrazie drugim a następnie napisane jako

$$\left(\frac{T_1}{T_0} \right)_{\nu \gg 1} \approx 0,257\nu + \frac{1,1}{\nu^{1,5}} \approx 0,257 \left(1 + \frac{3,5}{\nu^{1,5}} \right) \nu. \quad (15)$$

Dla $\nu \gg 1$ wyrażenie (6) sprowadza się do postaci

$$\left(\frac{T_1}{T_0} \right)_{\nu \gg 1} = [a(\nu)]^{1/2} \nu, \quad (16)$$

a zatem

$$a_{v,1} = 0,066 \left(1 + \frac{3,5}{v^{4/3}} \right)^2$$

4. WZÓR DLA WSZELKICH WARTOŚCI v

Jako równanie spełniające warunki (10) i (15) przyjęto równanie

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + 0,066 \frac{15 + v^{1/3}}{8 + v^{1/3}} v^2 \right]^{1/2} \quad (I)$$

Dla $v^2 \ll 1$ sprowadza się ono do postaci

$$\frac{T_1}{T_0} \approx \left[1 + \frac{1}{8} v^2 - \frac{1}{136} v^{10/3} \right]^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{16} v^2,$$

a więc jest zgodne z (10), (11) i (13).

Dla $v^2 \gg 1$ wzór (I) może być przedstawiony jako

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_0} &= \left[1 + 0,066 \frac{1 + 15 v^{-1/3}}{1 + 8 v^{-1/3}} v^2 \right]^{1/2} \approx \\ &\approx \{ 1 + 0,066 [1 + (15 - 8) v^{-1/3}] v^2 \}^{1/2} \approx 0,257 \left(1 + \frac{3,5}{v^{1/3}} \right) v, \end{aligned}$$

co jest znów zgodne z (15).

Niezgodność wzoru (I) ze wzorem (14) Dorodnicyna dla $10 < v < \infty$ zawiera się w granicach $\pm 0,5\%$, ze wzorem (10) Fishera dla $0 < v < 2$ nie przekracza 2% , w zakresach zaś $20 < v < \infty$ i $0 < v < 0,5$ niezgodności te są praktycznie równe zeru.

Zgodność wzoru (I) w odniesieniu do wyników metod wykreślnych oraz doświadczenia, a dla niezbyt małych wartości v — ze wzorem Usui [11], [12] — jest również bardzo dobra.

Dla małych wartości v wzór Usui, dostosowany do charakterystyki danej równaniem (8), a mający postać

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + \left(\frac{1,614}{2\pi} v \right)^2 \right]^{2/3} \quad (17)$$

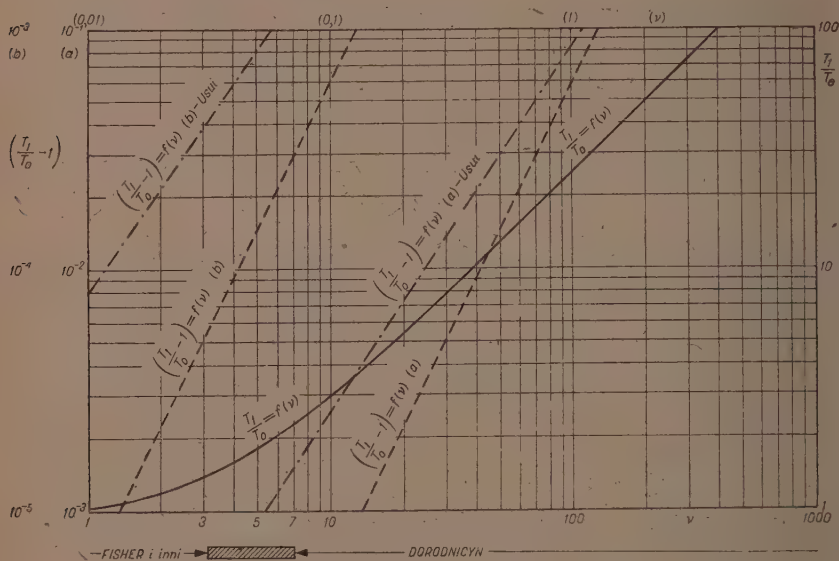
daje znaczne błędy, zwłaszcza jeśli chodzi o wyrażenie $\left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right)$.

5. INNA POSTAĆ WZORU DLA WSZELKICH WARTOŚCI ν

W poszukiwaniu prostszego i dogodniejszego wyrażenia o dokładności tego samego rzędu co wyrażenie (I) otrzymano wzór

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + 0,066 \frac{60 + \nu^2}{32 + \nu^2} \nu^2 \right]^{1/2}, \quad (II)$$

Niezgodność tego wzoru w całym zakresie ν w odniesieniu do innych, słusznych wzorów, nie przekracza $\pm 1,5\%$.



Rys. 1. Zależność okresu ($T_1 : T_0$) od parametru ν .

Zestawienie wyników otrzymanych różnymi wzorami oraz ich niedokładności, jak również niektóre dane otrzymane innymi sposobami podano w tablicy 1. Na rys. 1 przedstawiono linią ciągłą zależność $\frac{T_1}{T_0} = f(\nu)$ wykreśloną na podstawie wzorów (I) bądź (II), liniami przerywanymi zależność $\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) = f(\nu)$ na podstawie tych samych wzorów, liniami zaś przerywanymi z kropkami — ostatnią zależność na podstawie wzoru Usui.

Tablica 1

p	DOROD- NICYN	FISHER	SHOHAT	USUI		A U T O R				Inne metody					ARR
				wzór (14)	wzór (11)	wzór (12)	wzór (16)	Wzór I		Wzór II		Wykreslenie	?	?	
								wzór (11)	wzór (12)	Błąd	Błąd				
1	wzór (14)	wzór (11)	wzór (12)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
0		1,000	1,000	1,000	0			1,000	0						
0,001	—	1,0,62	—	1,0,21	(+ 3400)	1,0,62	0	1,0,62	0						
0,01	—	1,0,62	—	1,0,87	(+ 1400)	1,0,62	0	1,0,62	0						
0,1	—	1,0,62	1,002(?)	1,0,27	(+ 430)	1,0,62	0	1,0,62	0			—	1,00		
0,2	—	1,0,25	1,0055	1,0,77	(+ 310)	1,0,25	0	1,0,25	0						
0,5	—	1,016	1,021	1,031	—	1,015	—	1,015	—	1,026	1,0154				
1,0	((1,375))	1,061	1,08	1,085	—	1,057	—	1,061	—	1,057	1,0527	1,148	1,11	—	
2	—	1,224	1,30	1,233	—	1,199	—	1,21	—	1,243	1,2045	—	1,28	1,21	
3	—	1,431	1,53	1,411	—	1,389	—	1,41	—	1,439	1,4100	—	—	1,39	
4	—	(1,583)	1,77	1,609	—	1,588	—	1,67	—	—	—	—	—	1,60	
5	(1,812)	—	2,02	1,820	—	1,828	—	1,86	—	1,922	1,8055	—	—	1,83	
6	(2,040)	—	2,28	2,040	—	2,069	—	2,09	—	—	—	—	—	2,06	
7	2,274	—	2,56	2,266	-0,34	2,304	+1,3	2,31		—	—	—	—	2,30	
8	2,512	—	2,86	2,499	-0,52	2,542	+1,2	2,54		—	—	—	—		
10	2,997	—	3,33	2,970	-0,9	3,018	+0,7	3,00	0	—	—	—	2,56		
15	4,235	—	4,65	4,185	-1,1	4,260	+0,6	4,19	-1,1	—	—	—	3,23		
20	5,490	—	5,95	5,427	-0,62	5,508	+0,3	5,41	-1,5	—	—	—			
50	13,11	—	14,25	13,03	-0,36	13,13	+0,2	13,0	-0,8	—	—	—			
100	25,91	—	27	25,82	0	25,99	0	25,9	0	—	—	—			
500	128,6	—	—	128,6	0	128,6	0	129	0	—	—	—			
1000	256,9	—	—	256,9	0	256,9	0	257	0	—	—	—			
∞	257	—	—	257	0	257	0	257	0	—	—	—			

UWAGI DO TABLICY 1

- Kolumna 2. Zgodnie z Fisherem [5] wydaje się słuszne przyjęcie zakresu stosowności wzoru Dorodnicyna jako $7 < \nu < \infty$. Ze względu na dokładność wzoru [wzraz $O(\nu^{-4})$] wartości $T_1 : T_0$ obliczano do czterech cyfr. Liczby w nawiasach i podwójnych nawiasach pokazują odchylenia poza zakresem stosowności wzoru.
- Kolumna 3. Wzór Fishera słuszny w zakresie $0 < \nu < 3$. Dla $\nu \ll 1$ obliczano różnice od jedności z dokładnością znacznie większą; dla $\nu > 1$ — z dokładnością czterech cyfr.
- Kolumna 4. Większa dokładność obliczeń nie jest celowa wskutek uwzględnienia we wzorze Shohat jedynie pierwszych czterech wyrazów. Liczby podkreślone wzięto wprost od Shohat [9]; podana tam wartość 1,002 dla $\nu = 0,1$ jest niewątpliwie błędna; poprawnie obliczona wynosi 1,0006, zgodnie z innymi wzorami.
- Kolumny 5, 7 i 9. Dokładność obliczeń — do 4 cyfr; dla $\nu < 0,2$ przyjęto dokładność lepszą.
- Kolumny 6, 8 i 10. Dla $\nu < 0,1$ błędy obliczone względem wzoru Fishera odnoszą się do odchylenia od jedności; dla $\nu > 7$ — względem wzoru Dorodnicyna. Dla $0,2 < \nu < 7$ błędów nie obliczano wobec braku dostatecznie pewnego wzoru odniesienia.
- Kolumny 11, 12 i 13, 14. Wyniki podane przez różnych autorów, otrzymane różnymi sposobami lub z różnych źródeł.
- Kolumna 15. Wyniki otrzymane przez doc. L Łukaszewicza za pomocą analizatora równań różniczkowych (ARR) w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk. (IM-PAN).

Zakład Radiotechniki
 Politechniki Warszawskiej

WYKAZ LITERATURY

1. Akcasu Z. — Van der Pol's equation. Wir. Eng., sierpień 1954.
2. Appleton E. V., Greaves W. M. H. — On the solution of the representative differential equations of the triode oscillator. Phil. Mag. ser. 6. v. 45, 1923, s. 401.
3. Bruijn N. G. de — A note on van der Pol's equation — Phil. Res. Rep., v, 1, nr 6, 1946.
4. Dorodnicyn A. A. — Asimptotическое решение уравнения ван дер Поля — Прикл. мат. i мех. XI, 1947, s. 313.
5. Fisher E. — The period and amplitude of the van der Pol limit cycle. — J. Appl. Phys. 25, nr 3, 1954, s. 273.
6. Groszkowski J. — The interdependence of frequency variation and harmonic content and the problem of constant frequency oscillators. — P. I. R. E., July 1933.
- 7a. Groszkowski J. — O indukcyjności łuku i pojemności dynatronu. — Arch. Elektrot. T. 3, z. 1, 1954, s. 3.
- 7b. Groszkowski J. — Arc inductance and dynatron capacitance — Bull. Ac. Polon. des Sciences Cl. IV, v. II, 1945, s. 41.
8. Haag M. J. — Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillations de relaxation. — Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 61, 1944.
9. Shohat J. — On van der Pol's and related nonlinear differential equations. — J. Appl. Phys. 15.568, 1944.
10. Stoker J. J. — Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. New York 1950.

11. Usui R. — Operating mechanism of negative resistance oscillators. — J. Inst. of El. Eng. of Japan, Nr 1—7, 1931.
12. Usui R. — The nonlinear theory of electric oscillators. Reports of Radio Research in Japan, v. 5, 1935.

Я. ГРОШКОВСКИ

ПЕРИОД ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Резюме

Приведены два вида формул для периода предельного цикла нелинейного уравнения колебаний

$$\ddot{x} - \nu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

для всяких значений ν ($0 < \nu < \infty$), а именно

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + 0,066 \frac{15 + \nu^{1/3}}{8 + \nu^{1/3}} \nu^2 \right]^{1/2} \quad (\text{I})$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + 0,066 \frac{60 + \nu^3}{32 + \nu^2} \nu^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II})$$

Вид формул установлен при помощи метода баланса реактивной мощности гармоник; коэффициенты найдены на основании предельных условий ($\nu \rightarrow 0$ и $\nu \rightarrow \infty$). Эти формулы согласуются очень хорошо с формулами, которые были получены приближенными методами для значений $\nu \approx 0$ и $\nu \approx \infty$.

В таблице 1 составлены сравнительные результаты расчётов по разным формулам (а именно по формулам Фишера, Шохата, Дородницына и Усуи), величины погрешностей, а также результаты полученные иными способами.

J. GROSZKOWSKI

THE LIMIT-CYCLE PERIOD OF THE NONLINEAR OSCILLATION

Summary

There are given two forms of formulae determining the limit-cycle period of the nonlinear equation

$$\ddot{x} - \nu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

for all values of ν ($0 < \nu < \infty$), viz.

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + 0,066 \frac{15 + \nu^4}{8 + \nu^4} \nu^2 \right]^{1/2} \quad (I)$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + 0,066 \frac{60 + \nu^2}{32 + \nu^2} \nu^2 \right]^{1/2} \quad (II)$$

These formulae were established on the base of the method of the reactive power balance of harmonics; the coefficients were found from the boundary conditions $\rightarrow 0$ and $\nu \rightarrow \infty$). The formulae agree quite well with the formulae obtained by approximative methods for values $\nu \approx 0$ and $\nu \approx \infty$. Table 1 gives a comparison of results obtained with the aid of several formulae (namely formulae of Fisher, Shohat, Dorodnicyn and Usui), and of error-values and results obtained by other means.

621.391.1

W. NOWICKI

Oddłumiki *

Rękopis dostarczono 22. 9. 1954

Praca zawiera analizę własności transmisyjnych toru przewodowego, oddłumionego za pomocą jednego oddłumika, wtrąconego w dowolnym przekroju toru. Oddłumikiem autor nazywa urządzenie realizujące ujemną oporność zespoloną o pożądanej zależności od częstotliwości, przystosowane do współpracy z torem przewodowym. Odróżnia się oddłumiki *wzdłużne*, (jeżeli ujemna oporność zostaje wtrącona w przewody toru) i *poprzeczne* (jeżeli ujemna oporność zostaje wtrącona między przewody toru). Ponadto odróżnia się oddłumiki typu łukowego i typu dynatronowego. Zbadano zależność wzmocności wtrąceniowej oddłumika od różnych czynników, omówiono warunki stabilności, zanalizowano zniekształcenia tłumieniowe wprowadzane przez oddłumik do toru, wreszcie przeprowadzono porównanie oddłumików różnego rodzaju między sobą i ze wzmacniakiem jednotorowym. Jako główną zaletę oddłumików (w porównaniu ze wzmacniakiem jednotorowym) wymieniono możliwość przesyłania sygnałów zewowych i impulsów wybierania automatycznego bez użycia jakichkolwiek urządzeń dodatkowych, jak np. zmienników zewowych, które są niezbędne w przypadku stosowania wzmacniaków.

1. WSTĘP

Zagadnienie pokonywania odpowiedniego zasięgu przy zachowaniu żądanej jakości transmisji jest naczelnym zagadnieniem teletransmisji przewodowej. Zostało ono w bardzo znacznym stopniu rozwiązane przez zastosowanie lampy elektronowej. Dzięki niej stała się możliwa budowa wzmacniaków jednotorowych i dwutorowych, jednokanałowych i wielokanałowych, które znakomicie powiększyły zasięg urządzeń teletransmisyjnych z dziesiątków lub co najwyżej setek kilometrów do setek i tysięcy kilometrów.

Obok powszechnie stosowanych układów wzmacniających, które można scharakteryzować tym, że obwód siatki lampy jest w nich połączony ze

* Od Redakcji: Autor stosuje terminologię zaczerpniętą częściowo z własnej książki pt.: „Zasady teletransmisji przewodowej“, tom I, PWT, 1953, a częściowo z projektu Komisji Słownictwa Telekomunikacyjnego SEP. Terminy: oddłumik, cechownik i niektóre inne są nowymi terminami proponowanymi przez Autora w związku z wprowadzonymi przez Niego nowymi pojęciami.

źródłem energii, a obwód anody — z odbiornikiem, znane są od dość dawna [1] układy wzmacniające, oparte na realizacji oporności ujemnych. Mianowicie, stosując sprzężenie zwrotne dodatnie mamy możliwość uzyskiwania w układzie lampowym (i przy użyciu nawet tylko jednej lampy) ujemnej oporności rzeczywistej — R , ujemnej indukcyjności — L lub ujemnej oporności — C , zatem i oporności zespolonej, jaka wyniknie złączenia szeregowego, równoległego lub mieszanego wielkości — R , — L i — C ; przy tym dzięki jednoczesnemu zastosowaniu sprzężenia zwrotnego ujemnego uzyskane wielkości zachowują się w sposób praktycznie liniowy w określonym zakresie amplitud napięcia i prądu. Otrzymany w ten sposób układ jest więc dwójnikiem. Wtrącając ten dwójnik albo w przewód toru, albo między przewody toru otrzymujemy w pierwszym przypadku wzrost napięcia, a w drugim — wzrost prądu za dwójnikiem. W rezultacie oba przypadki są równoważne zmniejszaniu tłumienności toru, a więc powiększaniu jego zasięgu. Przeznaczone do tego celu i odpowiednio zaprojektowane dwójniki wraz z ewentualnymi ich akcesoriami będziemy nazywali *odtłumikami*, a tor przewodowy zaopatrzony w odtłumik lub w odtłumiki — *torem przewodowym odtłumionym*.

Aczkolwiek układy z opornością ujemną nie są techniczną nowością, to jednak zainteresowanie nimi w ostatnich latach znowu wzrosło z powodu niektórych korzyści, jakie może przynieść ich stosowanie.

Jak wiadomo, każdy dwójnik może być scharakteryzowany za pomocą jednego parametru: jego oporności zespolonej. W przypadku idealnego odtłumika obie składowe tej oporności (składowa rzeczywista i składowa urojona) powinny się zmieniać z częstotliwością w określony sposób, a mianowicie tak, jak to wynika z warunków współpracy odtłumika z danym torem przewodowym i z wymagań co do przebiegu charakterystyki tłumienności toru odtłumionego. W szczególnym przypadku możemy żądać, aby składowa rzeczywista oporności zespolonej odtłumika była ujemna i niezależna od częstotliwości, a składowa urojona — równa zero. W praktyce żądana zależność tych składowych od częstotliwości jest realizowana z określonym przybliżeniem i tylko w określonym pasmie częstotliwości, które nazwiemy *pasmem odtłumiania*. Poza pasmem odtłumiania przebieg oporności zespolonej jest z punktu widzenia odtłumiania obojętny. Pewne wymagania, jakie mogą być stawiane przebiegowi oporności zespolonej poza pasmem odtłumiania, wynikają jedynie z warunków stabilności układu. W szczególności poza pasmem odtłumiania oporność zespolona odtłumika może zachowywać się w niektórych zakresach częstotliwości jak oporność zespolona układu biernego; dla tych częstotliwości własności odtłumiające odtłumika całkowicie zanikają.

Tego rodzaju rozwiązanie techniczne mogłoby spowodować rewolucyjne wprost skutki dla dalszego rozwoju teletransmisji przewodowej.

gdyby nie ograniczenia w praktycznym jego stosowaniu. Brak dostatecznego doświadczenia nie pozwala jeszcze na dokładne sprecyzowanie tych ograniczeń, a zatem i zakresu przyszłego stosowania odtłumików, niemniej jednak można, jak się wydaje, twierdzić już obecnie, że odtłumiki mogą znaleźć przede wszystkim zastosowanie w telefonicznych sieciach okręgowych dla zmniejszania tłumienności dłuższych łączy międzycentrowych w tych sieciach.

W znacznym stopniu można ułatwić przewidywania co do własności toru odtłumionego przez opracowanie teorii takiego toru. Niniejszy artykuł stanowi właśnie próbę w tym względzie, przy czym będzie on ograniczony do rozpatrzenia przypadku, gdy w torze przewodowym działa tylko jeden odtłumik. Analiza toru zawierającego większą liczbę odtłumików będzie przedmiotem dalszych prac.

Teoria samego układu lampowego, realizującego żadaną oporność zespoloną, nie będzie tu poruszana; niewątpliwie stanie się ona tematem innych publikacji. Do zbudowania jednak teorii toru odtłumionego niezbędne są pewne informacje dotyczące własności dwójników realizujących wielkości $-R$, $-L$ i $-C$ lub różne połączenia tych wielkości.

2. WŁASNOŚCI DWÓJNIKA REALIZUJĄCEGO UJEMNĄ OPORNOŚĆ ZESPOLONĄ

Każdą oporność zespoloną, która wynika z szeregowego, równoległego lub mieszanego połączenia ujemnych oporności rzeczywistych, ujemnych indukcyjności i ujemnych pojemności, nazwiemy ogólnie *ujemną opornością zespoloną*. Realizacja takiej oporności zespolonej jest możliwa oczywiście jedynie za pomocą układu czynnego, a więc na przykład — układu lampowego.

Przykładem takiego układu może być układ¹ przedstawiony na rys. 1, w którym oznaczamy przez

\dot{U}_a — składową zmienną napięcia anody (względem ziemi),

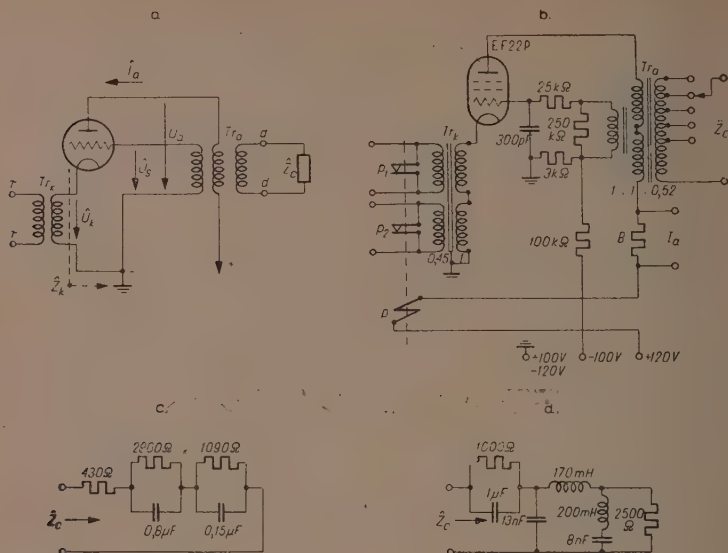
\dot{I}_a — składową zmienną prądu anody,

\dot{U}_s — składową zmienną napięcia siatki (względem ziemi),

\dot{U}_k — składową zmienną napięcia między katodą a ziemią,

\dot{Z}_a — $Z_a e^{j\varphi_{za}}$ oporność zespoloną w obwodzie anody, jaką „widzi” lampą, w szczególności zależną od oporności zespolonej \hat{Z}_c , stanowiącej obciążenie jednego z trzech uzwojeń transformatora Tr_a .

¹ Układ ten został opracowany przez doc. dra Leona Łukaszewicza na zlecenie Katedry Przenoszenia Przewodowego Politechniki Warszawskiej według warunków technicznych opracowanych przez mgra inż. Józefa Kosackiego i autora. Dostosowanie tego układu do pracy w roli odtłumika, a w szczególności dobranie cechow-
nika (o którym będzie jeszcze mowa) oraz badanie toru odtłumionego wykonał w Katedrze Przenoszenia Przewodowego inż. Bogdan Piwko — asystent Katedry pod bezpośrednim kierunkiem autora.



Rys. 1. Układ realizujący ujemną oporność zespoloną. a. schemat uproszczony, b. schemat pełny, c. cewownik toru nieupinizowanego, d. cewownik toru upinizowanego.

$\hat{\beta} = \beta e^{j\varphi_\beta} = -\frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_a}$ stosunek napięć \hat{U}_s i \hat{U}_a wzięty z odwrotnym znakiem,

S — nachylenie charakterystyki (prądu anody) lampy,

q — oporność wewnętrzną lampy,

μ — współczynnik amplifikacji lampy.

Wówczas obowiązują oczywiste związki

$$\hat{U}_a = -\hat{Z}_a \hat{I}_a, \quad (1)$$

$$\hat{U}_s = -\hat{\beta} \hat{U}_a = \hat{\beta} \hat{Z}_a \hat{I}_a, \quad (2)$$

natomiast z równania lampy wynika, że

$$-\hat{I}_a = S(\hat{U}_s - \hat{U}_k) + \frac{1}{q}(\hat{U}_a - \hat{U}_k), \quad (3)$$

przy czym sprzężenie zwrotne uzyskiwane przez wytworzenie napięcia \hat{U}_k na uzwojeniu transformatora Tr_k jest ujemnym sprzężeniem prądowym.

Podstawiając do równania (3) wielkości \hat{U}_a i \hat{U}_s z poprzednich związków otrzymamy

$$\hat{I}_a = S\hat{\beta}\hat{Z}_a\hat{I}_a - S\hat{U}_k - \frac{1}{q}\hat{Z}_a\hat{I}_a - \frac{1}{q}\hat{U}_k. \quad (4)$$

Stąd (przyjmując, że prąd siatki równa się zeru) wyznaczmy oporność zespoloną między katodą a ziemią, a więc oporność stanowiącą obciążenie transformatora Tr_k , jako

$$\hat{Z}_k = -\frac{\hat{U}_k}{\hat{I}_a} = -\frac{1 - \hat{\beta}\hat{Z}_a + \frac{1}{e}\hat{Z}_a}{S + \frac{1}{e}}. \quad (5)$$

Ponieważ jednak, jak wiadomo,

$$Sq = \mu,$$

przeto

$$\hat{Z}_k = -\hat{\beta} \frac{1 - \frac{1}{\hat{\beta}\mu} - \frac{1}{\hat{\beta}S\hat{Z}_a}}{1 + \frac{1}{\mu}} \hat{Z}_a, \quad (6)$$

co w przypadku, gdy wartości β i μ dobrano tak, że

$$\mu \gg 1 \quad \text{oraz} \quad \beta\mu \gg 1 \quad (7)$$

daje w przybliżeniu

$$\hat{Z}_k \approx -\hat{\beta}\hat{Z}_a + \frac{1}{S}. \quad (8)$$

Jeżeli ponadto oporność zespolona Z_a nie jest zbyt mała, tak że

$$\beta Z_a \gg \frac{1}{S}, \quad (9)$$

to

$$\hat{Z}_k \approx -\hat{\beta}\hat{Z}_a. \quad (10)$$

Jak widać, między katodą lampy a ziemią otrzymuje się oporność zespoloną praktycznie równą oporności zespolonej \hat{Z}_a jaką „widzi” lampa, pomnożonej przez $\hat{\beta}$ i wziętej z odwrotnym znakiem. Aby tak otrzymana oporność była ujemną opornością zespoloną, trzeba, aby wielkość $\hat{\beta}\hat{Z}_a$ przedstawiała dodatnią oporność zespoloną; nastąpi to pod warunkiem, że będą spełnione nierówności

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_{\beta} + \varphi_{za} < \frac{\pi}{2}.$$

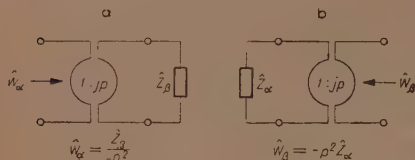
W praktyce jest rzeczą wygodną zabiegać o to, aby było $\varphi_{\beta} = 0$, czyli $\hat{\beta} = \beta$, to jest aby napięcie \hat{U}_s i \hat{U}_a były względem siebie przesunięte o pół okresu, co odpowiada dodatniemu sprzężeniu zwrotnemu (za pośrednictwem transformatora Tr_a); wówczas podane nierówności są bezwarunkowo spełnione. Warunek $\varphi_{\beta} = 0$ udaje się spełnić w pasmie odtłumianym

z dostatecznym dla praktyki przybliżeniem, tak iż można wtedy przyjąć, że

$$\hat{Z}_k \approx -\beta \hat{Z}_a \quad (10 \text{ bis})$$

W przybliżeniu taką samą oporność (ewentualnie zmienioną w stosunku określonym przekładnią transformatora) otrzymamy na zaciskach pierwotnych ll transformatora Tr_k . Oczywiście oporność \hat{Z}_a , a zatem i oporność \hat{Z}_k zależą od oporności \hat{Z}_c .

Niezależnie od zastosowanego schematu elektrycznego każdy układ realizujący ujemną oporność zespoloną w sposób doskonały, może być zawsze przedstawiony w postaci układu złożonego z przekładnika², o przekładni wyrażającej się liczbą uro-



Rys. 2. Schematy zastępcze doskonałego dwójnika, realizującego ujemną oporność zespoloną.

joną $\hat{p} = p e^{j\frac{\pi}{2}} = jp$, i z pewnej oporności zespolonej \hat{Z}_β , uzyskanej w wyniku dowolnego połączenia (szeregowego, równoległego, mieszanego) wielkości R , L , i C , a stanowiącej obciążenie tego przekładnika (rys. 2). Na rys. 1 rolę oporności \hat{Z}_β spełnia oporność \hat{Z}_c .

Łatwo zauważyć, że w tych warunkach oporność wejściowa pierwotna przekładnika jest

$$\hat{W}_a = \frac{\hat{Z}_\beta}{(jp)^2} = \frac{\hat{Z}_\beta}{-p^2} = -\frac{\hat{Z}_\beta}{n} \quad (11)$$

(rys. 2a), bowiem jak wiadomo, cechą przekładnika jest to, że przenosi on oporność obciążenia na drugą swą stronę, zmieniając tę oporność w stosunku kwadratu przekładni; dla wygody wprowadziliśmy tu oznaczenie $p^2 = n$. W poprzednio omówionym przykładzie (por. wzór 10 bis) rolę oporności \hat{W}_a spełniała oporność \hat{Z}_k , w związku z czym odpowiednikiem obecnie wprowadzonej wielkości n jest w tym przykładzie $\frac{1}{\beta}$.

Zachowanie się przekładnika jest „dwukierunkowe“. Jeżeli mianowicie obciążymy przekładnik po stronie pierwotnej opornością \hat{Z}_a , to oporność wejściowa wtórna przekładnika będzie (rys. 2b):

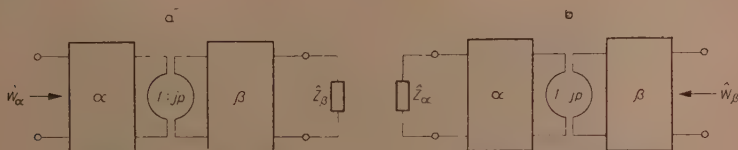
$$\hat{W}_\beta = (jp)^2 \hat{Z}_a = -p^2 \hat{Z}_a = -n \hat{Z}_a \quad (12)$$

W układzie przedstawionym na rys. 1 oznacza to, że jeżeli oporność \hat{Z}_a dołączymy do zacisków ll , to na zaciskach dd (oczywiście po odłączeniu od nich oporności \hat{Z}_c) wystąpi oporność \hat{W}_β .

² To jest idealnego transformatora, czyli transformatora pozbawionego strat, rozproszenia i pojemności własnej, a posiadającego dostatecznie duże indukcyjności uzwojeń [5].

Jak wynika ze wzorów (11) i (12) w obu przypadkach otrzymujemy ujemną oporność zespoloną, której moduł jest n razy mniejszy lub n razy większy od oporności zespolonej obciążającej przekładnik.

Rzeczywisty układ, realizujący ujemną oporność zespoloną, spełnia swe zadanie w sposób niedoskonały. Niedoskonałość tę można przedstawić w schemacie elektrycznym umieszczając z obu stron przekładnika czwórniki bierny, które w większym lub mniejszym stopniu zmodyfikują oporności wejściowe \hat{W}_α i \hat{W}_β (rys. 3).



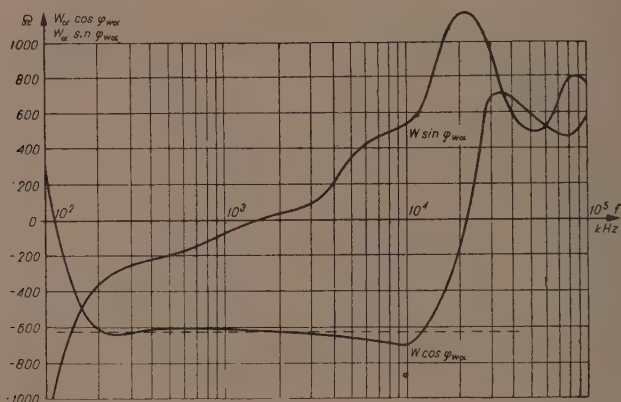
Rys. 3. Schematy zastępcze rzeczywistego dwójnika, realizującego ujemną oporność zespoloną.

W pewnym zakresie częstotliwości (który uczynimy pasmem odtłumiania) czwórniki te (na rys. 3 oznaczone symbolami α i β) są „elektrycznie przezroczyste” i mają przekładnię praktycznie równą jedności, tak iż niewiele wpływają na oporności wejściowe \hat{W}_α i \hat{W}_β . Nie zrobimy więc większego błędu, jeżeli będziemy posługiwali się w tym przypadku wzorami (11) i (12). Poza tym zakresem częstotliwości oba czwórniki odgrywają coraz większą rolę, wreszcie mogą się one stać czwórnikami „elektrycznie nieprzezroczystymi”; wówczas omawiany układ zatraci całkowicie swą zdolność realizowania ujemnej oporności zespolonej.

Jak widzimy, oporność obciążająca przekładnik gra rolę czynnika nadającego określoną cechę układowi realizującemu ujemną oporność zespoloną. Dopóki nie mamy oporności obciążenia, dopóty o rozpatrywanym układzie można twierdzić co najwyżej, że jest on zdolny do wytworzenia ujemnej oporności zespolonej. O tym, jaką wartość przybierze ujemna oporność zespolona, decyduje dopiero oporność obciążająca przekładnik.

Jeżeli chcemy uzyskać określoną wartość ujemnej oporności zespolonej lub określoną jej zależność od częstotliwości, to powinniśmy w tym celu dobrać w odpowiedni sposób układ elementów biernych R , L , C , stanowiący obciążenie przekładnika, na przykład tak jak to pokazano na rys. 1c i 1d. Tak więc układ bierny realizujący oporność zespoloną stanowi wyodrębniający się z całości i manipulacyjnie ważny składnik urządzenia. Z tego względu, jak się wydaje, zasługuje on na odrębną nazwę. W dalszym ciągu będziemy nazywali go *cechownikiem* układu realizującego ujemną oporność zespoloną, ewentualnie — w zastosowaniu do odtłumika — *cechownikiem* danego odtłumika.

Przypuśćmy, że cehownik jest opornością rzeczywistą, niezależną od częstotliwości, to znaczy, że w przypadku przedstawionym na rys. 2a mamy $\hat{Z}_\beta = Z_\beta = \text{const}$, a w przypadku przedstawionym na rys. 2b mamy $\hat{Z}_a = Z_a = \text{const}$. W takim razie w układzie doskonałym otrzymalibyśmy odpowiednio albo $\hat{W}_a = -\frac{1}{n} Z_\beta = W_a$, albo $\hat{W}_\beta = -n Z_a = W_\beta$. Natomiast w układzie rzeczywistym otrzymane wyniki byłyby bliskie powyższym wyni-



Rys. 4. Oporność $W_a = W_a e^{j\varphi_{wpa}}$ w funkcji częstotliwości, gdy oporność $Z_\beta = 1000 \Omega$ i $n = p^2 = 1,6$.

kom jedynie w ograniczonym zakresie częstotliwości. Na rys. 4 podano dla przykładu przebieg uzyskanej w praktyce oporności zespolonej \hat{W}_a dla $\hat{Z}_\beta = 1000 \Omega$ przy $n = p^2 = 1,6$. Prosta przerywana odnosi się do układu doskonałego.

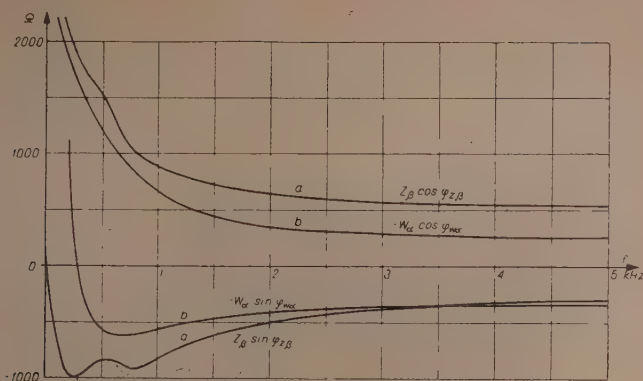
Przypuśćmy, że cehownik jest opornością zespoloną, zależną od częstotliwości, zrealizowaną za pomocą układu przedstawionego na rys. 5. W takim



Rys. 5. Przykład cehownika.

razie przebieg obu składowych oporności zespolonej cehownika dla szczególnych wartości jego elementów C_1, R_1, C_2, R_2 i R_3 byłyby taki jak pokazano na rys. 6 (krzywa a). Jednocześnie na tym samym wykresie pokazano przebieg obu składowych uzyskanej w praktyce oporności wejściowej \hat{W}_a przy $n = p^2 = 1,6$ (krzywa b).

Każdy układ realizujący ujemną oporność zespoloną może być uważany za „potencjalny generator“, który zaoscytuje, jeżeli nie zostaną spełnione odpowiednie warunki. Warunki te mogą być zawsze sprowadzone



Rys. 6. Oporność zespolona \hat{Z}_β cechownika i oporność zespolona wyjściowa \hat{W}_α odtłumika z tym cechownikiem w funkcji częstotliwości.

do znanego ogólnego warunku stabilności, zwanego warunkiem Nyquista, który w zastosowaniu do układów doskonałych, przedstawionych na rys. 2, można sformułować następująco.

Jeżeli dany dwójnik, realizujący ujemną oporność zespoloną, jest wtrącony do pewnego obwodu (rys. 7), to krzywa miejsc geometrycznych końców wektora

$$\frac{\hat{Z}_\beta}{n\hat{Z}_\alpha}$$

w płaszczyźnie liczb zespolonych nie powinna obejmować sobą punktu $1 \cdot e^{j0^\circ}$. W praktyce warunek ten może być zastąpiony warunkiem tak zwanej „bezwarunkowej stabilności“, mianowicie warunkiem, przy którym będzie spełniona nierówność

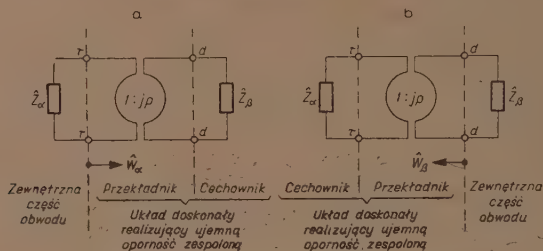
$$\left| \frac{\hat{Z}_\beta}{n\hat{Z}_\alpha} \right| \equiv \frac{Z_\beta}{nZ_\alpha} < 1 \quad (13)$$

dla tych wszystkich częstotliwości, dla których oporności zespolone \hat{Z}_α i \hat{Z}_β mają jednakowe argumenty.

Powyższy warunek dotyczy zarówno przypadku, gdy \hat{Z}_α odnosi się do zewnętrznej części obwodu, a \hat{Z}_β — do cechownika (rys. 7a) jak i przypadku odwrotnego (rys. 7b).

Jeżeli mamy do czynienia z układami rzeczywistymi (rys. 3), to w warunku Nyquista zamiast oporności \hat{Z}_α i \hat{Z}_β powinny wystąpić oporności zespolone „widziane“ przez przekładnik, gdy „patrzy on“ w jedną i drugą stronę, a więc oporności wejściowe czwórników α i β ; będą to oporności \hat{Z}_α i \hat{Z}_β w mniejszym lub większym stopniu zmodyfikowane obecnością czwórników α i β .

Chociaż warunek (13) bezwarunkowej stabilności układu nie zależy od tego, jakiej pary zacisków przekładnika użyjemy jako pary zacisków dwójnika, realizującego ujemną oporność zespoloną, to jednak nie znaczy



Rys. 7. Obwody zawierające ujemną oporność zespoloną.

to, że uzyskane w obu tych przypadkach ujemne oporności zespolone \hat{W}_a i \hat{W}_β mają te same własności. Posługując się bowiem nierównością (13) stwierdzimy, że dla przypadku przedstawionego na rys. 7a ma być

$$|\hat{W}_a| \equiv W_a = \frac{Z_\beta}{n} < Z_a \quad (14)$$

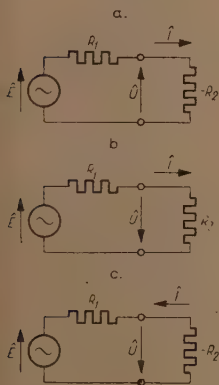
dla tych wszystkich częstotliwości, dla których oporności zespolone \hat{Z}_a i \hat{Z}_β mają jednakowe argumenty. Posługując się zaś tą samą zależnością dla przypadku przedstawionego na rys. 7b, znajdziemy

$$|\hat{W}_\beta| \equiv W_\beta = nZ_a > Z_\beta \quad (15)$$

dla tych wszystkich częstotliwości (jak poprzednio), dla których oporności zespolone \hat{Z}_a i \hat{Z}_β mają jednakowe argumenty. Oznacza to innymi słowy, że w przypadku użycia zacisków ll (rys. 7a) jako zacisków zewnętrznych dwójnika, realizującego ujemną oporność zespoloną, moduł Z_a oporności zespolonej \hat{Z}_a zewnętrznej części obwodu powinien być większy od modułu W_a oporności wejściowej \hat{W}_a dwójnika, podczas gdy w przypadku użycia zacisków dd (rys. 7b) jako zacisków zewnętrznych, moduł Z_β oporności zespolonej \hat{Z}_β zewnętrznej części obwodu powinien być mniejszy od modułu W_β oporności wejściowej \hat{W}_β dwójnika. W obu tych przypadkach podane zastrzeżenia odnoszą się oczywiście tylko do częstotliwości, dla których oporności \hat{Z}_a i \hat{Z}_β mają jednakowe argumenty. Wyrażając się poglądowo można by powiedzieć, że ujemna oporność zespolona \hat{W}_a , a więc oporność uzyskiwana na zaciskach ll , „boi się” zbyt małych oporności zewnętrznych, podczas gdy ujemna oporność zespolona \hat{W}_β , a więc oporność uzyskiwana na zaciskach dd , „boi się” zbyt dużych oporności zewnętrznych.

Wyżej wymienione różnice w zachowaniu się ujemnych oporności zespolonych \hat{W}_α i \hat{W}_β wypływają z faktu istnienia dwóch typów takich oporności, a mianowicie tzw. typu łukowego („szeregowego“, „prądowego“) i tzw. typu dynatronowego („równoległego“, „napięciowego“).

Aby zdać sobie łatwiej sprawę z różnicy, jaka istnieje między tymi dwoma typami ujemnych oporności zespolonych, przyjmijmy dla uproszczenia, że mamy do czynienia wyłącznie z rzeczywistymi opornościami (dodatnimi i ujemnymi) i rozpatrzmy układ, w którym źródło o sile elektromotorycznej \hat{E} i oporności wewnętrznej R_1 jest zamknięte na ujemną oporność rzeczywistą $-R_2$. Niewątpliwie prąd \hat{I} , który popłynie w takim obwodzie, będzie przesunięty o pół okresu w stosunku do napięcia \hat{U} występującego na ujemnej oporności rzeczywistej $-R_2$. Jednakże możliwe są dwa następujące, odmienne przypadki. W pierwszym z nich prąd płynący w obwodzie jest w fazie z siłą elektromotoryczną, a zatem ma tę samą fazę, jaką miałby prąd płynący w tym obwodzie, gdybyśmy ujemną oporność $-R_2$ zastąpili dodatnią opornością $+R_2$ — natomiast napięcie jest przesunięte względem tego prądu o pół okresu. Tego rodzaju oporność ujemna jest właśnie opornością typu łukowego (rys. 8a i 8b). W drugim przypadku rzecz ma się odwrotnie: napięcie na oporności $-R$ jest



Rys. 8. Rysunek a: oporność rzeczywista ujemna $-R_2$ typu łukowego w obwodzie źródła prądu sinusoidalnie zmiennego; napięcie \hat{U} jest w fazie przeciwnej do prądu \hat{I} , podczas gdy ten prąd jest w fazie z prądem, jaki płynąłby, gdyby oporność ujemną $-R_2$ zastąpić opornością dodatnią $+R_2$, jak pokazano na rysunku b. Rysunek c: oporność rzeczywista ujemna $-R_2$, typu dynatronowego w obwodzie źródła prądu sinusoidalnie zmiennego; prąd \hat{I} jest w fazie przeciwnej do napięcia \hat{U} , podczas gdy to napięcie jest w fazie z napięciem, jakie wystąpiłoby między tymi samymi punktami obwodu, gdyby oporność ujemną $-R_2$ zastąpić opornością dodatnią $+R_2$, jak pokazano na rysunku b.

w fazie z siłą elektromotoryczną, a zatem ma tę samą fazę, jaką miałoby napięcie występujące na oporności $+R_2$ wstawionej zamiast oporności $-R_2$, natomiast prąd jest przesunięty względem tego napięcia o pół okresu. Tego rodzaju oporność ujemna jest typu dynatronowego (rys. 8b i 8c). Pierwszy przypadek jest możliwy pod warunkiem, że

$$R_1 - R_2 > 0, \quad (16)$$

podczas gdy drugi przypadek — pod warunkiem, że

$$R_1 - R_2 < 0. \quad (17)$$

Łatwo zauważyć, że nierówność (16) jest odpowiednikiem nierówności (14), gdyż oporność \hat{Z}_a na rys. 7a odpowiada oporności R_1 , a oporność \hat{W}_a — oporności R_2 . Podobnie stwierdzimy, że nierówność (17) jest odpowiednikiem nierówności (15). Tak więc warunek (14) dotyczy ujemnych oporności zespolonych typu łukowego, a warunek (15) — ujemnych oporności zespolonych typu dynatronowego. Posługując się schematami zastępczymi, pokazanymi na rys. 2, 3 i 7, możemy stwierdzić, że ujemną oporność zespoloną typu łukowego uzyskuje się na parze zacisków połączonych z „uzwojeniem“, którego „liczba zwojów“ jest *jp* razy mniejsza od „liczby zwojów“ drugiego uzwojenia (rys. 2a, 3a i 7a), podczas gdy ujemną oporność zespoloną typu dynatronowego uzyskuje się na drugiej parze zacisków (rys. 2b, 3b i 7b). W związku z tym zaciski układów pokazanych na rys. 7 i na rys. 1 oznaczyliśmy odpowiednio literami *ll* i *dd*.

Podane informacje, dotyczące różnic występujących między opornościami ujemnymi typu łukowego i typu dynatronowego, nie są kompletne. W szczególności nie zawierają one wyjaśnienia, skąd wynika warunek stabilności (13), z którego, jak widzieliśmy, z kolei wynikają automatycznie: warunek (14) dla oporności typu łukowego i warunek (15) dla oporności typu dynatronowego. Dla rozwijanej obecnie teorii toru odtłumionego podane informacje są jednak zupełnie wystarczające. Natomiast czytelnik interesujący się bliżej zagadnieniem oporności ujemnych znajdzie je w literaturze [10].

3. KLASYFIKACJA ODTŁUMIKÓW

Teoretycznie biorąc istnieją dwie różne możliwości wtrącania odtłumików do toru przewodowego: *wtrącanie wzdlużne* i *wtrącanie poprzeczne*.

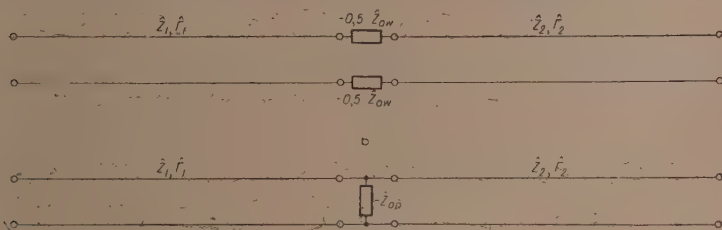
W pierwszym przypadku dwójniki, realizujące ujemną oporność zespoloną, są włączane w przewody toru, przy czym dla zachowania symetrii doziemnej toru należy zastosować dwa jednakowe dwójniki po jednym w każdym z przewodów. W praktyce wystarczy oczywiście zastosować jeden dwójnik poprzedzony transformatorem, którego jedno z uzwojeń składa się z dwu połówek; jedną z połówek wtrąca się w jeden przewód toru, a drugą — w drugi przewód.

W drugim przypadku dwójniki, realizujące ujemną oporność zespoloną, włącza się między przewody toru.

Ograniczając się do rozpatrzenia pracy torów, które są odtłumiane za pomocą tylko jednego odtłumika, możemy stwierdzić, że w zasadzie możliwe jest wtrącanie odtłumika w dowolnym przekroju toru, a więc na przykład na jednym z końców toru lub w jego środku. Umieszczanie jednak odtłumika nie w środku toru, a zwłaszcza na jednym z jego końców, ma różne wady, jak na przykład te, że uprzywilejowuje jeden

kierunek transmisji wobec drugiego pod względem stopnia niewrażliwości na zakłócenia oraz że utrudnia spełnienie warunku stabilnej pracy odtłumika. Ostatnia wada występuje w przypadku, gdy łańcuch telekomunikacyjny nie jest łańcuchem trwałym, gdy zatem możliwe jest zwieranie lub rozwieranie toru na jednym lub na obu jego końcach. Umieszczając bowiem odtłumik w środku toru sprawiamy — że odtłumik staje się najmniej wrażliwy na zmiany oporności obciążenia toru na obu jego końcach. Z tych wszystkich względów należy dążyć do umieszczania odtłumika w środku toru. Aby jednak niepotrzebnie nie zwięzać zakresu zastosowań teorii toru przewodowego, przyjmijmy założenie, że odtłumik znajduje się w dowolnym miejscu toru przewodowego oraz że oba odcinki toru są różne pod względem ich własności elektrycznych. Natomiast tor odtłumiony złożony z dwóch odcinków, jednakowych pod względem długości i pod względem własności elektrycznych, potraktujemy jako przypadek szczególny.

W zależności od tego, czy stosujemy odtłumianie wzdłużne, czy odtłumianie poprzeczne, otrzymujemy dwa różne układy toru odtłumionego,



Rys. 9. Tor odtłumiony za pomocą jednego odtłumika: a. w sposób wzdłużny, b. w sposób poprzeczny. Parametry falowe odcinków toru są:

\hat{Z}_1, \hat{I}_1 i \hat{Z}_2, \hat{I}_2 . Oporności zespolone odtłumików są $-\hat{Z}_{ow}$ i $-\hat{Z}_{op}$.

przedstawione na rys. 9, gdzie $-\hat{Z}_{ow}$ i $-\hat{Z}_{op}$ oznaczają ujemne oporności zespolone. Dla uproszczenia będziemy nazywali odtłumik działający w sposób pokazany na rys. 9a — odtłumikiem wzdłużnym, a odtłumik działający w sposób pokazany na rys. 9b — odtłumikiem poprzecznym.

Zarówno w odtłumiku wzdłużnym, jak i w odtłumiku poprzecznym ujemne oporności zespolone wtrącane do toru mogą być albo typu łukowego albo typu dynatronowego; odpowiednio do tego będziemy również odróżniali odtłumik typu łukowego od odtłumika typu dynatronowego. Ogólnie więc biorąc możliwe są cztery następujące rodzaje odtłumików:

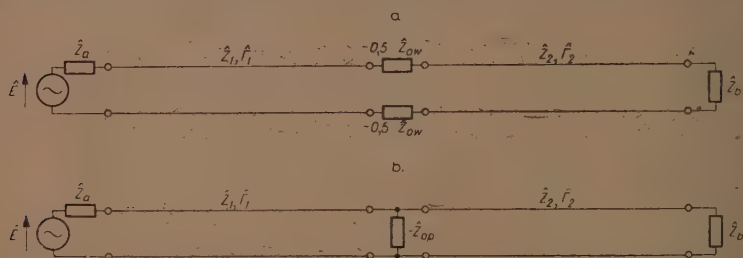
1. odtłumik wzdłużny typu łukowego,
2. odtłumik wzdłużny typu dynatronowego,
3. odtłumik poprzeczny typu łukowego,
4. odtłumik poprzeczny typu dynatronowego.

W pierwszym i trzecim przypadku zastosowane na rys. 9 symbole \hat{Z}_{ow} i \hat{Z}_{op} mają to samo znaczenie co symbol \hat{W}_a na rys. 2a, 3a, 7a, natomiast w drugim i czwartym przypadku symbole \hat{Z}_{ow} i \hat{Z}_{op} mają to samo znaczenie co symbol \hat{W}_β na rys. 2b, 3b i 7b.

4. WZMOCNOŚĆ WTRĄCENIOWA ODTŁUMIKA

Najbardziej interesującym zagadnieniem w teorii toru odtłumionego jest to, jakiej zmianie ulega moc wydzielana w odbiorniku, przyłączonym do toru, wskutek wtrącenia odtłumika. Aby scharakteryzować tę zmianę, posłużymy się pojęciem *wzmocności wtrąceniowej* odtłumika, określonej jako połowa logarytmu naturalnego stosunku mocy (pozarnej lub czynnej) wydzielanej w odbiorniku, dołączonym do toru odtłumionego, do mocy (odpowiednio: pozornej lub czynnej) wydzielanej w tymże odbiorniku po usunięciu odtłumika z toru. Tak określona wielkość jest oczywiście równa tłumienności wtrąceniowej wziętej z przeciwnym znakiem³.

Przypuśćmy, że odtłumik wzdłużny (rys. 10a), ewentualnie odtłumik



Rys. 10. Odtłumik wzdłużny (a) i odtłumik poprzeczny (b) pracujący w torze przewodowym. $\hat{Z}_1, \hat{\Gamma}_1$ i $\hat{Z}_2, \hat{\Gamma}_2$ oznaczają parametry falowe odcinków tego toru, a $-\hat{Z}_{ow}$ i $-\hat{Z}_{op}$ — oporności zespolone odtłumików.

poprzeczny (rys. 10b), pracuje w torze przewodowym, którego odcinki mają parametry falowe: $\hat{Z}_1, \hat{\Gamma}_1$ i $\hat{Z}_2, \hat{\Gamma}_2$. Na jednym końcu toru włączono źródło o parametrach \hat{E} i \hat{Z}_a , a na drugim — odbiornik \hat{Z}_b . Zastępując część układu zawierającą źródło i połączony ze źródłem odcinek toru o parametrach \hat{Z}_1 i $\hat{\Gamma}_1$ zastępczym źródłem o parametrach \hat{E}_z i \hat{S} , a część zawierającą odbiornik i drugi odcinek toru o parametrach \hat{Z}_2 i $\hat{\Gamma}_2$ — zastępczym odbiornikiem o oporności \hat{W} otrzymamy układy pokazane na rys. 11⁴.

³ Patrz [7], s. 182.

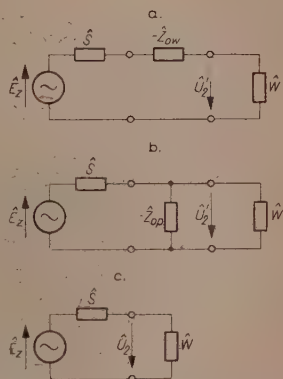
⁴ Zwraca się uwagę na to, że użyte obecnie symbole \hat{Z}_a i \hat{S} nie mają nic wspólnego z symbolami \hat{Z}_a i S użytymi w rozdziale 2.

W przypadku odtłumiania wzdłużnego (rys. 11a) napięcie za odtłumikiem

$$\hat{U}'_2 = \hat{E}_z \frac{\hat{W}}{\hat{S} - \hat{Z}_{ow} + \hat{W}},$$

a w przypadku odtłumiania poprzecznego (rys. 11b) analogiczne napięcie

$$\begin{aligned} \hat{U}'_2 &= \hat{E}_z \frac{-\hat{Z}_{op} \cdot \hat{W}}{-\hat{Z}_{op} + \hat{W}} = \\ &= \hat{E}_z \frac{-\hat{Z}_{op} \cdot \hat{W}}{-\hat{Z}_{op} + \hat{W}} \cdot \frac{\hat{S} + \frac{-\hat{Z}_{op} \cdot \hat{W}}{-\hat{Z}_{op} + \hat{W}}}{\hat{S} + \frac{-\hat{Z}_{op} \cdot \hat{W}}{-\hat{Z}_{op} + \hat{W}}} = \\ &= \hat{E}_z \frac{-\hat{Z}_{op} \cdot \hat{W}}{-\hat{Z}_{op}(\hat{S} + \hat{W}) + \hat{S}\hat{W}}. \end{aligned}$$



Rys. 11. Układy zastępcze pomocne do wyznaczenia wzmocności wtórnicowej: a i c — odtłumika wzdłużnego, b i c — odtłumika poprzecznego.

Natomiast po usunięciu odtłumika z toru (rys. 11c) otrzymujemy w przekroju toru, w którym poprzednio występowało napięcie \hat{U}'_2 , napięcie

$$\hat{U}_2 = \hat{E}_z \frac{\hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}}.$$

Stosunek mocy (pozornych lub czynnych) wydzielanych w odbiorniku \hat{Z}_b w przypadku obecności odtłumika i po jego usunięciu z toru równa się jednak, jak łatwo sprawdzić, stosunkowi kwadratów napięć $|\hat{U}'_2| = U'_2$, $|\hat{U}_2| = U_2$. Zatem wzmocność wtórnicową odtłumika wzdłużnego można wyrazić zależnością

$$\begin{aligned} K_{ww} &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{U'_2}{U_2} \right)^2 = \ln \frac{U'_2}{U_2} = \ln \left| \frac{\hat{E}_z \frac{\hat{W}}{\hat{S} - \hat{Z}_{ow} + \hat{W}}}{\hat{E}_z \frac{\hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}}} \right| = \\ &= \ln \left| \frac{\hat{S} + \hat{W}}{\hat{S} + \hat{W} - \hat{Z}_{ow}} \right| = \ln \left| \frac{1}{1 - \frac{\hat{Z}_{ow}}{\hat{S} + \hat{W}}} \right|, \end{aligned} \quad (18)$$

a wzmocność wtrąceniową odłumika poprzecznego — zależnością

$$K_{wp} = \ln \frac{U'_2}{U_2} = \ln \left| \frac{\hat{E}_z \cdot \frac{-\hat{Z}_{op} \cdot \hat{W}}{-\hat{Z}_{op}(\hat{S} + \hat{W}) + \hat{S}\hat{W}}}{\hat{E}_z \frac{\hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}}} \right| =$$

$$= \ln \left| \frac{-\hat{Z}_{op}(\hat{S} + \hat{W})}{-\hat{Z}_{op}(\hat{S} + \hat{W}) + \hat{S}\hat{W}} \right| = \ln \left| \frac{1}{1 - \frac{1}{\hat{Z}_{op}} \cdot \frac{\hat{S}\hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}}} \right| \quad (19)$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\hat{k}_w = \frac{\hat{Z}_{ow}}{\hat{S} + \hat{W}}, \quad (20)$$

$$\hat{k}_p = \frac{1}{\hat{Z}_{op}} \cdot \frac{\hat{S}\hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}}. \quad (21)$$

Jak widać, wielkość pomocnicza \hat{k}_w , odnosząca się do odłumiania wzdłużnego, równa się stosunkowi oporności zespolonej odłumika wzdłużnego wziętej ze znakiem odwrotnym do sumy oporności wejściowych obu odcinków toru, podczas gdy wielkość pomocnicza \hat{k}_p , odnosząca się do odłumiania poprzecznego, równa się stosunkowi przewodności zespolonej odłumika poprzecznego, wziętej ze znakiem odwrotnym do sumy przewodności wejściowych obu odcinków toru. W związku z tym wielkość \hat{k}_w nazwiemy *opornością zredukowaną odłumika wzdłużnego*, a wielkość \hat{k}_p — *przewodnością zredukowaną odłumika poprzecznego*.

W szczególnym przypadku, gdy oba odcinki odłumianego toru mają tę samą oporność falową ($\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = \hat{Z}$) i są obciążone na swych końcach opornościami falowo dopasowanymi do toru ($\hat{Z}_a = \hat{Z}_b = \hat{Z}$) mamy $\hat{S} = \hat{W} = \hat{Z}$ a zatem zamiast wzorów (20) i (21) otrzymujemy

$$\hat{k}_w = \frac{\hat{Z}_{ow}}{2\hat{Z}}, \quad (20 \text{ bis})$$

$$\hat{k}_p = \frac{\hat{Z}}{2\hat{Z}_{op}}. \quad (21 \text{ bis})$$

Jeżeli wielkości \hat{k}_w i \hat{k}_p oznaczyć wspólnym symbolem \hat{k} , to zależności (18) i (19) sprowadzają się do jednej, wspólnej dla obu rodzajów odłumiania, zależności

$$K_w = \ln \left| \frac{1}{1 - \hat{k}} \right|, \quad (22)$$

z tym oczywiście zastrzeżeniem, że przez wielkość \hat{k} należy rozumieć albo wielkość \hat{k}_w określoną wzorem (20), albo wielkość \hat{k}_p określoną wzorem (21), w zależności od tego, czy mamy do czynienia z odtłumianiem wzdłużnym, czy z odtłumianiem poprzecznym.

Oznaczając

$$\hat{k} = k e^{j\varphi_k} \quad (23)$$

zamiast zależności (22) napiszemy

$$K_w = \ln \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2k \cos \varphi_k + k^2}} \right] = -\frac{1}{2} \ln (1 - 2 \cos \varphi_k + k^2). \quad (24)$$

Rysunek 12 przedstawia rodzinę krzywych stałej wzmocności wtrąceniowej w układzie biegunowym (k , φ_k). Krzywe te są kołami współśrodkowymi. Środek kół jest określony wartościami $k=1$ i $\varphi_k=0$. Promienie kół są równe e^{-K_w} . Jak widać, znak argumentu φ_k nie ma żadnego wpływu na wzmocność wtrąceniową odtłumika, natomiast wzrost bezwzględnej wartości tego argumentu powoduje spadek wzmocności tym większy, im wielkość k jest bliższa jednoci. Wzmocność nieskończenie wielka występuje jedynie przy $k=1$ i $\varphi_k=0$.

Zakres $0 < k < 1$ nazwiemy zakresem A, a zakres $1 < k < \infty$ — zakresem B pracy odtłumika.

Jeżeli przyrównamy do siebie wielkości \hat{k}_w i \hat{k}_p to ze wzorów (20) i (21) otrzymamy

$$\hat{Z}_{cp} = \frac{\hat{S}\hat{W}}{\hat{Z}_{ow}}, \quad (25)$$

a ze wzorów (20 bis) i (21 bis)

$$\hat{Z}_{op} = \frac{\hat{Z}^2}{\hat{Z}_{ow}} \quad (25 \text{ bis})$$

Oznacza to, że odtłumik wzdłużny o danej oporności — \hat{Z}_{ow} daje tę samą wzmocność wtrąceniową, co odtłumik poprzeczny o oporności — \hat{Z}_{op} wyznaczanej ze wzoru (25) lub ze wzoru (25 bis).

Ze wzoru (22) wynika, że wzmocność wtrąceniowa odtłumika na ogół zależy od częstotliwości. Jeżeli jednak dobrać odpowiednio bądź oporność \hat{Z}_{ow} , bądź oporność \hat{Z}_{op} odtłumika, to wyrażenie

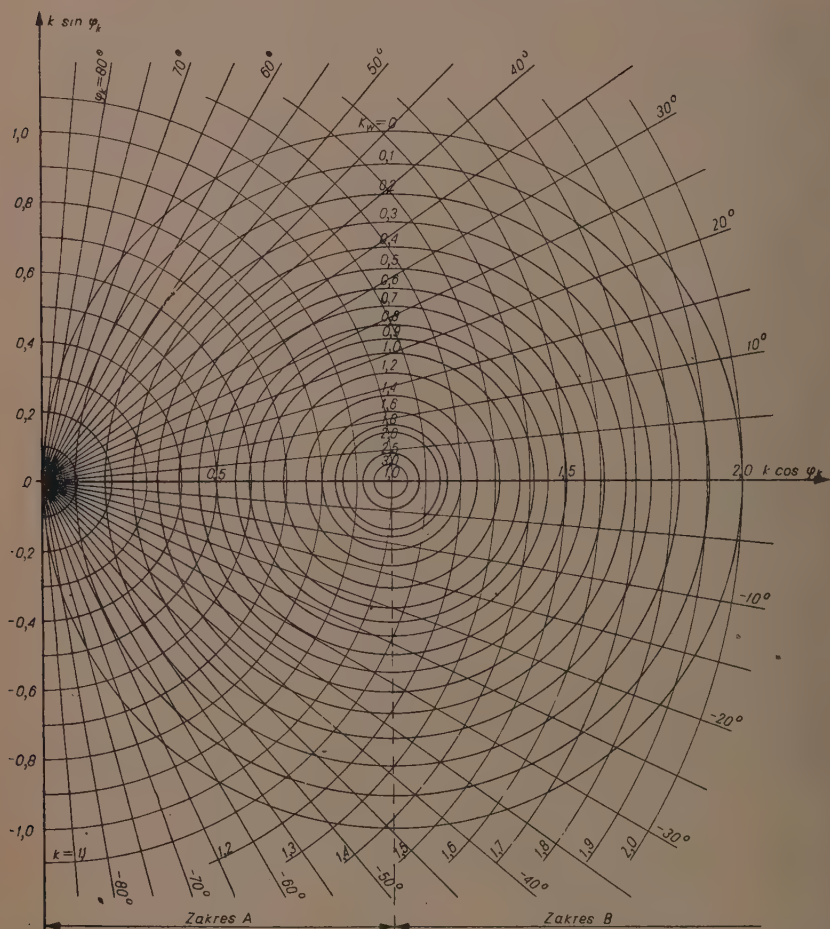
$$|1 - \hat{k}|$$

można uczynić niezależnym od częstotliwości, przynajmniej z określonym przybliżeniem i przynajmniej w określonym zakresie częstotliwości, na przykład w pasmie odtłumiania. Spowoduje to z kolei, iż wzmocność wtrą-

ceniowa K_w stanie się również niezależna od częstotliwości. Aby uzyskać taki stan rzeczy, powinno być

$$1 - 2k \cos \varphi_k + k^2 = e^{-2K_w} = \text{const}, \quad (26)$$

co wynika ze wzoru (24). Tak więc oporność odtłumika (\hat{Z}_{ow} lub \hat{Z}_{op}) powinna zmieniać się z częstotliwością w ten sposób, aby moduł k i argument φ_k wielkości k (tj. bądź oporności zredukowanej \hat{k}_w , bądź przewodności zredukowanej \hat{k}_p) spełniały zależność (26). Na rysunku 12 poruszamy się wówczas po kole odpowiadającym danej wartości K_w .



Rys. 12. Krzywe stałej wzmocności wtórnym K_w odtłumika (koła) w układzie prostokątnym ($k \cos \varphi_k$, $k \sin \varphi_k$) lub w układzie biegunowym (k , φ_k).

Aby uprościć postępowanie, przyjmiemy, że argument $\varphi_k = 0$. Wówczas zamiast zależności (26) otrzymamy warunki

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k &= 0, \\ \hat{k} = k = 1 \mp e^{-K_w} &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Widzimy, że stałość wzmocności wtrąceniowej odtłumika można używać czyniąc oporność (przewodność) zredukowaną odtłumika rzeczywistą i niezależną od częstotliwości. W tym celu cechownik odtłumika powinien być wykonany w postaci takiego dwójnika biernego, dla którego obie składowe oporności zespolonej (składowa rzeczywista i składowa urojona) zmieniają się ze zmianą częstotliwości według takiego samego prawa, według jakiego zachodzą zmiany oporności zespolonej $S + \hat{W}$, ewentualnie oporności zespolonej

$$\frac{\hat{S}\hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}}.$$

Zauważmy, że dwoistość znaku we wzorze (27) oznacza, iż istnieją dwie różne możliwości doboru wielkości k odpowiadające dwom różnym zakresom pracy odtłumika, o których będzie jeszcze mowa w następnym rozdziale (znak — dotyczy zakresu A , a znak + zakresu B , pokazanych na rys. 12); w obu tych przypadkach punkty odpowiadające warunkom (27) leżą na osi odciętych.

Jeżeli są spełnione warunki (27), to zamiast zależności (22) otrzymujemy

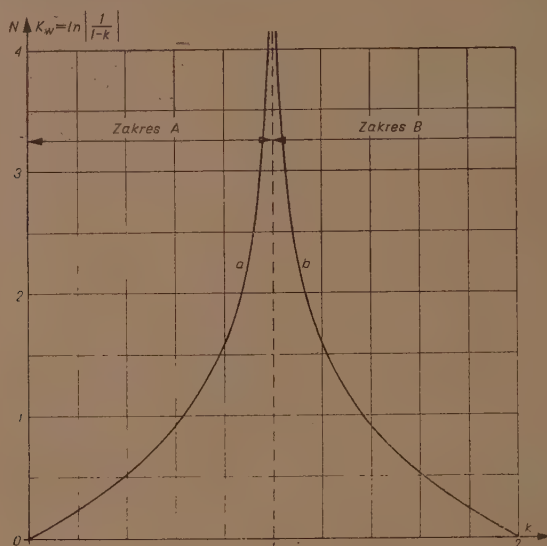
$$K_w = \ln \left| \frac{1}{1-k} \right|. \quad (28)$$

Funkcję tę przedstawiono na rys. 13. Jak widać, te same wartości wzmocności wtrąceniowej uzyskuje się dla pewnej wartości k , co i dla wartości $2-k$. Przy $k=1$ mielibyśmy wzmocność nieskończenie wielką. W tych warunkach układ jest oczywiście niestabilny. Przy $k > 2$ wzmocność jest ujemna, co oznacza, że wtrącanie takiego odtłumika zmniejszy moc wydzielaną w odbiorniku.

W praktyce udaje się spełnić warunki (27) tylko z określonym przybliżeniem, w wyniku czego ze zmianą częstotliwości moduł k oscyluje dokoła pewnej wartości stałej, a argument φ_k oscyluje dokoła wartości zerowej.

Odtłumianie toru w taki sposób, iż wzmocność wtrąceniowa odtłumika nie zależy od częstotliwości (przynajmniej w pasmie odtłumiania) może być pożądanym rodzajem odtłumiania, gdyż wówczas zniekształcenia tłumieniowe wprowadzane przez tor nie ulegają zwiększeniu w odtłumiku. Możliwy jest jednak i taki rodzaj odtłumiania, w którym wzmocność wtrąceniowa zależy w odpowiedni sposób od częstotliwości, dzięki czemu

zniekształcenia tłumieniowe nie tylko nie zostaną zwiększone, lecz nawet ulegają zmniejszeniu. W szczególności możemy wymagać, aby wzmocność wtrąceniowa od tłumika, umieszczonego w torze złożonym z dwóch jednakowych odcinków, była w pasmie od tłumiania praktycznie równa tłumienności jednego z tych odcinków; jak wiemy, analogiczne wymagania stawia się wzmacniakom telefonicznym.



Rys. 13. Funkcja $K_w = \ln \left| \frac{1}{1-k} \right|$.

Przypuśćmy więc, że od tłumik znajduje się między dwoma jednakowymi odcinkami o parametrach \hat{Z} i $\hat{I} = A + jB$ oraz że jego wzmocność wtrąceniowa ma być w pasmie od tłumiania równa tłumienności falowej A jednego odcinka. W takim razie zastępując w zależności (26), ewentualnie w zależnościach (27), wielkość K_w wielkością A znajdziemy, że w pasmie od tłumiania powinno być

$$1 - 2k \cos \varphi_k + k^2 = e^{-2A} \quad (29)$$

lub w szczególnym przypadku

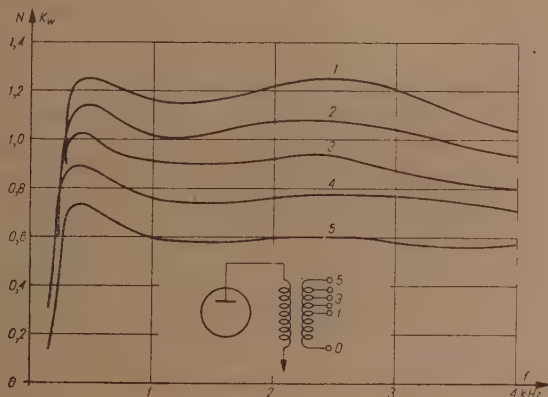
$$\varphi_k = 0,$$

$$k = 1 \mp e^{-A}. \quad (30)$$

Należy zatem tak projektować oporność zespoloną od tłumika (\hat{Z}_{op} lub \hat{Z}_{op}), aby moduł i argument oporności (przewodności) zredukowanej od tłumika spełniały warunek (29) przynajmniej z określonym przybliże-

niem. Dla uproszczenia postępowania warunek (29) można zastąpić warunkami (30).

W praktyce może zachodzić potrzeba regulowania wzmocności wtrąceniowej odtłumika. Aby ją umożliwić, można przewidzieć jednoczesną regulację wszystkich elementów cechownika za pomocą wspólnego prze-



Rys. 14. Wzmocność wtrąceniowa odtłumika w funkcji częstotliwości w przypadku dołączenia cechownika do zacisku 0 oraz do jednego z pięciu pozostałych zacisków transformatora.

łącznika lub, co jest łatwiejsze, można poprzedzić cechownik transformatorem, którego jedno z uzwojeń jest zaopatrzone w zaczepty. Na rysunku 14 dla przykładu przedstawiono rodzinę krzywych wzmocności wtrąceniowej odtłumika dla różnych zaczeptów transformatora.

5. STABILNOŚĆ I ZAKRESY PRACY ODTŁUMIKÓW

W celu zbadania stabilności odtłumików oprzemy się na ogólnych zasadach bezwarunkowej stabilności, dotyczących ujemnych oporności zespolonych, a wyrażonych nierównościami (14) i (15). Zauważmy, że w przypadku odtłumiania wzdłużnego wielkość \hat{Z}_{ow} odpowiada albo wielkości \hat{W}_a , jeżeli odtłumik jest typu łukowego, albo wielkości \hat{W}_β , jeżeli odtłumik jest typu dynatronowego, podczas gdy wielkość $\hat{S} + \hat{W}$ odpowiada odpowiednio albo wielkości \hat{Z}_a , albo wielkości \hat{Z}_β . W przypadku zaś odtłumiania poprzecznego wielkość \hat{Z}_{op} odpowiada albo wielkości \hat{W}_a , jeżeli odtłumik jest typu łukowego, albo wielkości \hat{W}_β , jeżeli odtłumik jest typu dynatronowego, podczas gdy wielkość $\frac{\hat{S}\hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}}$ odpowiada odpowiednio albo wielkości \hat{Z}_a , albo wielkości \hat{Z}_β . Kierując się więc nierównościami

(14) i (15) oraz uważając oporności \hat{S} i \hat{W} za dane możemy określić warunki, jakie powinny spełniać wielkość \hat{Z}_{ow} ewentualnie wielkość \hat{Z}_{op} , aby odtłumik pracował stabilnie.

Rozpatrzmy bardziej szczegółowo, jakie stąd wynikają wymagania w odniesieniu do pasma odtłumiania.

Jeżeli w pasmie odtłumiania $\hat{k}_w = k_w = \text{const}$ i $\hat{k}_p = k_p = \text{const}$, to wielkości zespolone \hat{Z}_α i \hat{Z}_β mają w tym pasmie zgodne argumenty zarówno w przypadku odtłumiania wzdłużnego, jak i w przypadku odtłumiania poprzecznego. Oznacza to, że niebezpieczeństwo wzbudzenia się układu jest wówczas jednakowe w całym pasmie odtłumiania, innymi słowy, że nie ma żadnych częstotliwości „upośledzonych“, przy których układ wzbudza się chętniej niż przy innych częstotliwościach.

Aby nie powstały oscylacje, należy spełnić nierówność (14), jeżeli mamy do czynienia z odtłumikiem typu łukowego, a nierówność (15), jeżeli mamy do czynienia z odtłumikiem typu dynatronowego. Tak więc powinno być:

1. w przypadku odtłumika wzdłużnego typu łukowego, stosownie do wzoru (14)

$$|\hat{Z}_{ow}| \equiv Z_{ow} < |\hat{S} + \hat{W}|,$$

czyli uwzględniając zależność (20)

$$k_w < 1; \quad (31)$$

2. w przypadku odtłumika wzdłużnego typu dynatronowego, stosownie do wzoru (15)

$$|\hat{Z}_{ow}| \equiv Z_{ow} > |\hat{S} + \hat{W}|,$$

czyli uwzględniając zależność (20)

$$k_w > 1; \quad (32)$$

3. w przypadku odtłumika poprzecznego typu łukowego, stosownie do wzoru (14)

$$|\hat{Z}_{op}| \equiv Z_{op} < \left| \frac{\hat{S}\hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}} \right|,$$

czyli uwzględniając zależność (21)

$$k_p > 1; \quad (33)$$

4. wreszcie w przypadku odtłumika poprzecznego typu dynatronowego, stosownie do wzoru (15)

$$|\hat{Z}_{op}| \equiv Z_{op} > \left| \frac{\hat{S}\hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}} \right|,$$

czyli uwzględniając zależność (21)

$$k_p < 1. \quad (34)$$

Widzimy, że uwidoczniony na rys. 13 zakres A , określony warunkiem

$$0 < k < 1, \quad (35)$$

jest zakresem pracy albo odtłumika wzdłużnego typu łukowego, albo odtłumika poprzecznego typu dynatronowego, podczas gdy uwidoczniony tamże zakres B , określony warunkiem

$$1 < k < \infty, \quad (36)$$

jest zakresem pracy albo odtłumika wzdłużnego typu dynatronowego albo odtłumika poprzecznego typu łukowego. Część zakresu B określona warunkiem

$$2 < k < \infty \quad (37)$$

jest nieużyteczna wobec tego, że w tym zakresie uzyskuje się ujemną wzmocność wtrąceniową odtłumika.

Jeżeli wielkość $\hat{k} = k$ zależy od częstotliwości, na przykład jeżeli dobrano ją tak, aby wzmocność wtrąceniowa odtłumika była dla każdej częstotliwości pasma odtłumiania równa tłumienności falowej A odcinka toru, to powyższe wnioski pozostają nadal aktualne z tą jednak zmianą, że obecnie odtłumik jest bardziej skłonny do zaoscyłowania na pewnej częstotliwości niż na innych; „krytyczną“ pod tym względem jest ta częstotliwość, przy której wzmocność wtrąceniowa odtłumika jest największa.

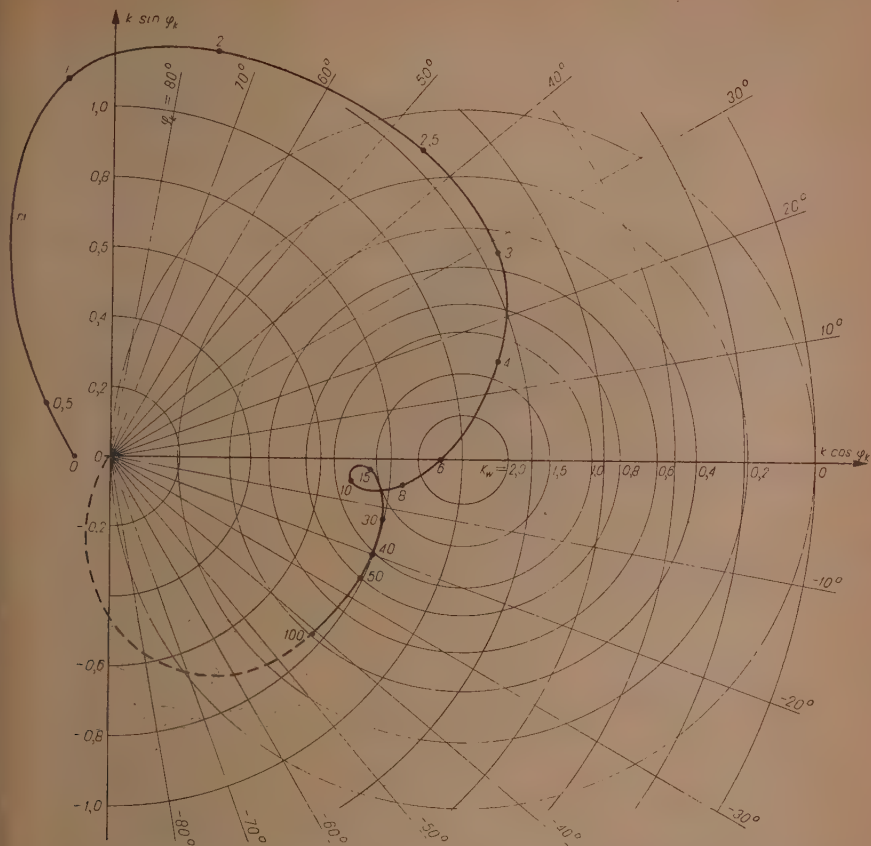
Jeżeli w pasmie odtłumiania wielkość \hat{k} jest w zasadzie wielkością zespoloną, czyli jeżeli $\varphi_k \neq 0$, to zgodnie z warunkami stabilności stwierdzimy, że oscylacje nie powstaną nawet wówczas, gdy nie będzie spełniona nierówność (14) lub nierówność (15). Wynikałoby z tego, że jest wówczas z punktu widzenia stabilności rzeczą obojętną, czy odtłumik jest typu łukowego, czy też typu dynatronowego. Taki wniosek byłby jednak mylny, choćby już z tego względu, że w pasmie odtłumiania występują zwykle takie szczególne częstotliwości, przy których $\varphi_k = 0$. Częstotliwości te grają więc rolę częstotliwości krytycznych. Właśnie ze względu na nie konieczne jest spełnienie tego lub innego warunku stabilności w zależności od rodzaju odtłumika. Niezależnie od tego istnieje oczywiście również możliwość wzbudzenia się układu na częstotliwości leżącej poza pasmem odtłumiania. Jednakże w poprawnie wykonanym odtłumiku żądana wzmocność w pasmie odtłumiania powinna być osiągalna bez wywołania oscylacji czy to w pasmie odtłumiania, czy też poza tym pasmem. W tym celu należy spełnić ogólny warunek bezwarunkowej stabilności (13) również poza pasmem odtłumiania czy to przez właściwe zaprojektowanie cechownika, czy też przez uczynienie czwórników α i β (rys. 3) czwórnikami dostatecznie nieprzezroczystymi poza pasmem odtłumiania. Dzięki temu warunki, w jakich się znajduje odtłumik dla częstotliwości leżących

poza pasmem odtłumiania, nie będą stanowiły przeszkody w uzyskaniu żądanej wzmocności w pasmie odtłumiania.

Wszystkim powyższym rozważaniom można nadać następującą uzupełniającą interpretację graficzną. Gdyby się udało spełnić warunki $k=k=\text{const}$ i $\varphi_k=0$ dla wszystkich częstotliwości, to na wykresie przedstawionym na rys. 12, miejscem geometrycznym m punktów pracy odtłumika byłby jeden tylko punkt leżący na osi odciętych albo na lewo, albo na prawo od punktu ($k=1$, $\varphi_k=0$), a na wykresie na rys. 13 miejscem geometrycznym m byłby punkt leżący albo na lewym (a), albo na prawym (b) ramieniu krzywej. Gdyby dla wszystkich częstotliwości był spełniony tylko warunek $\varphi_k=0$, to analogicznym miejscem geometrycznym m byłby na rys. 12 odpowiedni odcinek osi odciętych, położony albo na lewo, albo na prawo od punktu ($k=1$, $\varphi_k=0$), natomiast na rys. 13 takim miejscem geometrycznym byłby odcinek albo krzywej a , albo krzywej b . W rzeczywistości warunki $k=k=\text{const}$ i $\varphi_k=0$, ewentualnie warunek $\varphi_k=0$ mogą być spełnione tylko w przybliżeniu i tylko w określonym zakresie częstotliwości, podczas gdy w pozostałych zakresach częstotliwości warunek $\varphi_k=0$ bywa spełniony tylko przy niektórych częstotliwościach. Wynika stąd, że miejsce geometryczne m punktów pracy odtłumika przedstawia się na rys. 12 w postaci pewnej krzywej, której odcinek dotyczący pasma odtłumiania albo leży całkowicie na osi odciętych, albo przebiega w jej pobliżu, podczas gdy pozostałe odcinki są w zasadzie mniej lub więcej oddalone od osi odciętych, mając z nią co najwyżej niektóre punkty wspólne. Dla bezwarunkowej stabilności odtłumika jest właśnie rzeczą istotną: 1. aby krzywa m nie miała punktów wspólnych z odcinkiem osi odciętych położonym w zakresie B , jeśli ma je z odcinkiem osi odciętych położonym w zakresie A , lub odwrotnie, 2. aby to, z jakim z dwóch odcinków krzywa m ma punkty wspólne było dostosowane do rodzaju odtłumika. Mianowicie, jeżeli wchodzi w grę odtłumik wzdłużny typu łukowego lub odtłumik poprzeczny typu dynatronowego, to krzywa m może mieć punkty wspólne tylko z odcinkiem należącym do zakresu A ; jeżeli natomiast wchodzi w grę odtłumik wzdłużny typu dynatronowego albo odtłumik poprzeczny typu łukowego, to krzywa m może mieć punkty wspólne jedynie z odcinkiem należącym do zakresu B ⁵.

Na rysunku 15 podano tytułem przykładu krzywą m w przypadku jednego z odtłumików wzdłużnych typu łukowego.

⁵ Jeżeli oprócz się na ogólnym warunku Nyquista stabilności układu, to należałoby „przepisać” dotyczący przebiegu krzywej m wyrazić inaczej. Jednak wtedy istniałaby możliwość wzbudzenia się układu w określonych okolicznościach, na przykład w chwili doprowadzania napięć zasilających lampę lub w razie zmiany parametrów lampy.



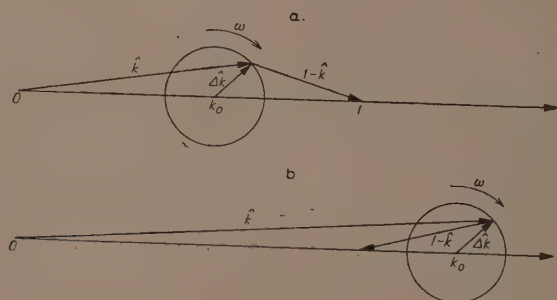
Rys. 15. Miejsce geometryczne m końców wektora $k = k_e e^{j\varphi_k}$ w układzie biegunowym (k, φ_k) jednego z odtłumików, wykazujących znaczne zniekształcenia tłumieniowe w pasmie odtłumiania 300—3400 Hz (przykładowo). Liczby przy poszczególnych punktach krzywej m oznaczają częstotliwości w setkach herców.

6. ZNIEKSZTAŁCENIA TŁUMIENIOWE I PUŁAP WZMOCNOŚCI ODTŁUMIKA

Założenie, iż oporność zredukowana k_w odtłumika wzdłużnego bądź przewodność zredukowana k_p odtłumika poprzecznego jest stała i niezależna od częstotliwości w pasmie odtłumiania lub że zmienia się ona w ściśle określony sposób, jest w rzeczywistości spełnione tylko w przybliżeniu. Wobec tego jest rzeczą słuszną zbadać, jakie skutki pociąga za sobą odstępstwo od tego założenia.

Przypuśćmy najpierw, że dążąc do uzyskania żądanej i stałej wartości wzmacnienia wtrąceniowej $K_w = K_{w0}$ w pasmie odtłumiania, a więc sto-

sownie do wzoru (28) również żądanej i stałej wartości $k=k_0$, dobraliśmy w odpowiedni sposób cechownik odtłumika. Wskutek niedoskonałości cechownika, wskutek częściowej nieprzezroczystości dodatkowych czwórników α i β (rys. 3) lub wreszcie wskutek nieuniknionych w praktyce wahań oporności wejściowych \hat{S} i \hat{W} w funkcji częstotliwości uda się spełnić proporcjonalność oporności \hat{Z}_{ov} do oporności $\hat{S} + \hat{W}$ (ewentualnie: proporcjonalność \hat{Z}_{op} do oporności $\frac{\hat{S}\hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}}$) tylko w przybliżeniu, co oznacza, że zamiast wielkości k_0 otrzymamy wielkość zespoloną $\hat{k} = k e^{j\varphi_k}$ wahającą się (a ściślej mówiąc: krążącą) ze zmianą częstotliwości dokoła wartości k_0 . W praktyce wahania te można uznać za okresowe i w związku z tym można uważać, że koniec wektora \hat{k} porusza się po kole, którego środek leży w punkcie o współrzędnych $(k_0, 0)$, i którego promień Δk jest mały wobec k_0 (rys. 16) ⁶.



Rys. 16. Do wyjaśnienia zmian wielkości $k = k e^{j\varphi_k}$ w funkcji częstotliwości w pasmie odtłumiania: a. dla zakresu A pracy odtłumika, b. dla zakresu B pracy odtłumika.

W praktyce oczywiście w miarę zmiany częstotliwości promień Δk zmienia się również w pewnym stopniu.

Z rysunku 16 widać, że krańcowe wartości $|1 - \hat{k}|$ (wartość najmniejszą i wartość największą) otrzymamy wtedy, gdy koniec wektora \hat{k} znajduje się na osi odciętych albo w punkcie bliższym do punktu $(1, 0)$ albo na przeciwnym końcu średnicy koła, czyli albo wtedy, gdy

$$|1 - \hat{k}| = |1 - (k_0 \pm \Delta k)|, \quad (38)$$

albo, gdy

$$|1 - \hat{k}| = |1 - (k_0 \mp \Delta k)|, \quad (39)$$

jeżeli górne znaki przed Δk odnoszą się do zakresu A pracy odtłumika (rys. 16a), a dolne znaki — do zakresu B pracy odtłumika (rys. 16b).

⁶ Patrz [7], s. 289.

Każdej z tych dwóch krańcowych wartości odpowiada, stosownie do wzoru (22), określona wzmocność wtrąceniowa. Posługując się bezwzględną wartością różnicy tych dwóch krańcowych wzmocności i oznaczając ją przez δ znajdziemy

$$\delta = \left| \ln \frac{1}{|1 - (k_0 \pm \Delta k)|} - \ln \frac{1}{|1 - (k_0 \mp \Delta k)|} \right| = \left| \ln \left| \frac{1 - k_0 \pm \Delta k}{1 - k_0 \mp \Delta k} \right| \right|, \quad (40)$$

przy czym górne znaki przed Δk odnoszą się do zakresu A , a dolne znaki — do zakresu B pracy odtłumika. Ale w zakresie A mamy $k_0 < 1$, a w zakresie B mamy $k_0 > 1$, ponadto zaś zawsze

$$0 < \Delta k < |1 - k_0|$$

wobec czego ułamek

$$\frac{1 - k_0 \pm \Delta k}{1 - k_0 \mp \Delta k}$$

jest zawsze większy od jedności, co upoważnia nas do opuszczenia znaków bezwzględnej wartości. Możemy zatem napisać

$$\delta = \ln \frac{1 - k_0 \pm \Delta k}{1 - k_0 \mp \Delta k}$$

lub

$$\delta = \ln \frac{|1 - k_0| + \Delta k}{|1 - k_0| - \Delta k}. \quad (41)$$

Wielkość δ charakteryzuje zniekształcenia tłumieniowe wprowadzane do toru przez odtłumik, podczas gdy wielkość Δk charakteryzuje uzyskane w praktyce największe odchylenia wielkości k od pożądanej wartości k_0 . Traktując wielkość δ jako wielkość zadana, to znaczy przyjmując, że zniekształcenia tłumieniowe nie powinny przekroczyć określonej wartości, oraz uważając Δk również za znane, ze wzoru (41) znajdziemy

$$|1 - k_0| = \Delta k \frac{e^\delta + 1}{e^\delta - 1}, \quad (42)$$

a stąd, stosownie do wzoru (22), stwierdzimy, że przeciętna wzmocność wtrąceniowa, jaka może być osiągnięta w tych warunkach, jest

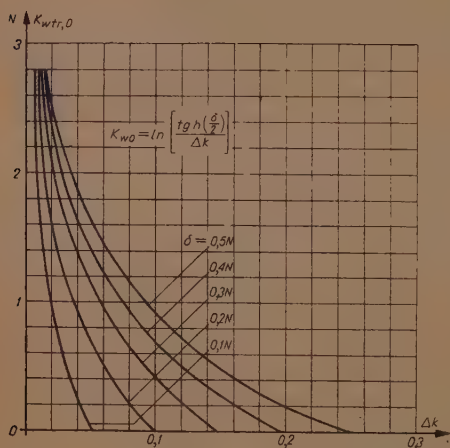
$$K_{wo} = \left[\ln \frac{1}{\Delta k} \cdot \frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1} \right] = \ln \left[\frac{\operatorname{th} \frac{\delta}{2}}{\Delta k} \right]. \quad (43)$$

Wyznaczona z tego wzoru wartość K_{wo} może być uważana za *pułap* przeciętnej *wzmocności wtrąceniowej* odtłumika, jaki można osiągnąć w pasmie odtłumiania.

Na rysunku 17 podano rodzinę krzywych przedstawiających zależność przeciętnej wzmocności K_{wo} od odchylenia

$$\Delta k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{2} \quad (44)$$

dla różnych wartości δ oznaczających największą różnicę wzmocności, jeżeli k_{\max} oznacza największą wartość modułu wielkości k w pasmie odtłumiania, a k_{\min} — najmniejszą wartość tego modułu. Z wykresów



Rys. 17. Zależność przeciętnej wzmocności wtrąceniowej K_{wo} odtłumika od odchylenia

$\Delta k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{2}$ dla różnych wartości δ , charakteryzujących zniekształcenia tłumieniowe wprowadzane przez odtłumik.

odczytujemy, że na przykład chcąc uzyskać wzmocność równą 1 neperowi i zniekształcenia tłumieniowe nie przekraczające 0,3 N trzeba, aby $\Delta k < 0,056$ czyli trzeba, aby oporność zredukowana (przewodność zredukowana) odtłumika nie różniły się od wartości teoretycznej k_0 więcej niż o 5,6% dla żadnej częstotliwości pasma odtłumianego. Ta wartość teoretyczna powinna wynosić albo $k_0 = 0,62$, jeżeli praca odbywa się w zakresie A, albo $k_0 = 1,38$, jeżeli praca odbywa się w zakresie B, co można sprawdzić za pomocą krzywych a i b wykresu podanego na rys. 13.

Zauważmy teraz, że ze wzoru (43) i z krzywych pokazanych na

rys. 17 można korzystać również w tym przypadku, gdy wzmocność wtrąceniowa K_w jest funkcją częstotliwości, na przykład jeżeli spełnia ona warunek (29). Należy jedynie wówczas rozumieć przez K_{wo} przeciętną wartość wzmocności wtrąceniowej w tej części pasma odtłumianego, w której teoretycznie przewidywana wartość wzmocności wtrąceniowej ma być największa. Przypuśćmy, że tłumienność falowa A toru rośnie monotonicznie z częstotliwością (jak to zwykle bywa) oraz że w związku z tym pragniemy, żeby wzmocność K_w odtłumika rosła również z częstotliwością (przy czym K_w ma być tak bliskie A, jak to będzie możliwe). Zakładając co najwyżej dopuszczalne zniekształcenia tłumieniowe (przez obiór wartości δ oraz

licząc się z praktycznie możliwymi odchyleniami wielkości k od pożądanej jej wartości k_0 (przez obiór wartości Δk) ze wzoru (43) wyznaczymy przeciętną wartość K_{wo} wzmocności wtrąceniowej odtłumika przy największych częstotliwościach pasma odtłumianego. Przy mniejszych częstotliwościach zniekształcenia tłumieniowe będą oczywiście mniejsze.

7. PORÓWNANIE RÓŻNYCH RODZAJÓW ODTŁUMIKÓW

Z analizy zawartej w poprzednich rozdziałach wynika, że każdy z czterech rodzajów odtłumików (por. rozdz. 3) pozwala uzyskać żadaną wzmocność wtrąceniową, jeżeli zostaną spełnione określone dla danego rodzaju odtłumika warunki stabilności. Ponieważ warunki te są analogiczne, przeto można by uważać, że wszystkie cztery rodzaje odtłumików są równowartościowe. Wniosek taki byłby słuszny, gdybyśmy nie wzięli pod uwagę dodatkowych, a dotychczas nie poruszonych okoliczności.

Okoliczności, o których mowa, dotyczą dwóch zagadnień:

1. zagadnienia stabilności odtłumika w przypadku wykonywania czynności łączeniowych, a więc na przykład w razie tworzenia zestawu łączy, w którego skład wchodzi tor odtłumiany, oraz w razie rozłączania tego zestawu;

2. zagadnienia przechodzenia przez odtłumik impulsów wybierania automatycznego i sygnałów zewowych.

Okoliczność związana z zagadnieniem łączeniowym wpływa przede wszystkim na wybór między odtłumikiem typu łukowego a odtłumikiem typu dynatronowego, podczas gdy okoliczność związana z zagadnieniem impulsowania i sygnalizacji zewowej wpływa głównie na wybór między odtłumikiem wzdłużnym a odtłumikiem poprzecznym.

Omówimy rolę obu tych zagadnień.

Odtłumiki typu łukowego i odtłumiki typu dynatronowego są sobie równowartościowe jedynie wtedy, gdy łańcuch telekomunikacyjny, w którym pracuje odtłumik, jest łańcuchem trwałym. Jeżeli natomiast przewiduje się dokonywanie przełączeń, to jest jeżeli dany tor odtłumiony jest częścią łącza będącego elementem wchodzącym w skład to tego to innego zestawu łączy, to warunki, w jakich się znajduje odtłumik podczas zestawiania lub likwidacji zestawu, mogą być tego rodzaju, że uniemożliwią stabilną pracę odtłumika tego lub innego typu. Mianowicie jeżeli tor odtłumiany zostaje przerywany w bliskości odtłumika lub jeżeli przewidujemy wręcz przerzucanie odtłumika z jednego toru do drugiego, to odtłumik „odczuwa“ tego rodzaju manipulacje jako przerywanie obwodu, w którym pracuje. W tym przypadku niewskazane jest stosowanie odtłumika typu dynatronowego, o którym mówiliśmy w rozdziale 2, iż „boi się“ on zbyt dużych oporności zewnętrznych. W momencie bowiem przerywania obwodu odtłumik taki wzbudziłby się, powodując ewentualne

zakłócenia w swym otoczeniu. Zauważmy jednak, że odtłumik poprzeczny znajduje się pod tym względem w korzystniejszych warunkach od odtłumika wzdłużnego: w przypadku przerwania toru tylko po jednej stronie odtłumika pozostaje on zamknięty na drugi nieodłączony odcinek toru. Można sprawdzić za pomocą wzorów (21) i (22) oraz na podstawie obserwacji rys. 12, że odtłumik poprzeczny typu dynatronowego nie wzbudzi się w ogóle w razie przerwania toru po jednej stronie odtłumika, jeżeli jego wzmacniająca w warunkach normalnej pracy jest mniejsza od $\ln 2 = 0,69 N$ (ta liczba jest słuszną, jeżeli oporności wejściowe obu odcinków toru są sobie równe: $\hat{S} = \hat{W}$).

Jeżeli podczas zestawiania lub rozłączania zestawu łączy zachodzi zwieranie toru w bliskości odtłumika, to rzecz się ma przeciwnie niż w poprzednim przypadku: niewskazane jest wówczas stosowanie odtłumika typu łukowego z tych samych powodów, z jakich poprzednio nie należało stosować odtłumika typu dynatronowego. Zauważmy jednak, że tym razem odtłumik wzdłużny znajduje się w korzystniejszych warunkach od odtłumika poprzecznego. Jeżeli bowiem nastąpi zwarcie po jednej stronie odtłumika wzdłużnego, to pozostaje on jeszcze zamknięty na oporność wejściową drugiego, niezwartego odcinka toru, podczas gdy odtłumik poprzeczny zostałby w tych warunkach zwarty całkowicie, a zatem zaoscyłowałby. Za pomocą wzorów (20) i (22) można wykazać, że odtłumik wzdłużny typu łukowego nie wzbudzi się w ogóle w razie zwarcia toru po jednej stronie odtłumika, jeżeli jego wzmacniająca w warunkach normalnej pracy jest mniejsza od $\ln 2 = 0,69 N$ (ta liczba jest słuszną, jeżeli oporności wejściowe obu odcinków toru są sobie równe: $\hat{S} = \hat{W}$).

Przechodząc do omówienia roli drugiego zagadnienia przypomnijmy, że impulsy wybierania automatycznego stanowią prąd jednokierunkowy przerywany z częstotliwością około 10 Hz oraz że sygnały zewowe korzystają również z małych częstotliwości, na przykład około 25 Hz. Częstotliwości te leżą zwykle poza pasmem odtłumiania odtłumika zarówno z tego powodu, że wzmacnianie tych prądów nie jest potrzebne, jak i z tego powodu, że odtłumianie bardzo małych częstotliwości nasuwa poważne trudności techniczne. Mimo to jest oczywiście rzeczą ważną, aby obecność odtłumika w torze nie pogarszała znacznie warunków przesyłania impulsów i sygnałów zewowych. Jeżeli stosujemy odtłumiki wzdłużne, to wymaganie to jest spełnione dzięki temu, że dla małych częstotliwości oporność odtłumika staje się opornością zespoloną dodatnią, wywołaną, praktycznie biorąc, jedynie własnościami uzwojenia transformatora, które zostało wtrącone w przewody toru (o tym transformatorze była mowa na początku rozdziału 3); oczywiście oporność ta jest stosunkowo mała, a przy prądzie stałym sprowadza się wyłącznie do oporności

rzeczywistej uzwojenia. Dzięki temu odtłumik nie stanowi w praktyce przeszkody w przesyłaniu impulsów wybierania i prądów zewowych. Jeżelibyśmy natomiast zastosowali odtłumiki poprzeczne, to wymaganie, aby obecność odtłumika nie przeszkadzała przesyłaniu impulsów wybierania i prądów zewowych, byłoby znacznie trudniejsze do spełnienia: dołączając odtłumik poprzeczny do toru za pośrednictwem transformatora spowodowalibyśmy to, że odtłumik zwierzałby, praktycznie biorąc, małe częstotliwości. Bezpośrednie zaś dołączenie układu lampowego do toru jest niewskazane przede wszystkim ze względu na wówczas występujące naruszenie symetrii doziemnej toru. Z tych względów należy oddać pierwszeństwo odtłumikowi wzdłużnemu.

Aczkolwiek niedostateczna liczba doświadczeń nie pozwala na ostateczną wypowiedź w tym względzie, to jednak wydaje się, że ze wszystkich czterech rodzajów odtłumików — odtłumik wzdłużny typu łukowego ma największą wartość praktyczną. W niniejszym artykule potraktowano jednak zagadnienie odtłumiania bardziej ogólnie, aby dać obraz różnych istniejących możliwości.

8. PORÓWNANIE ODTŁUMIKA ZE WZMACNIAKIEM JEDNOTOROWYM

Na zakończenie przeprowadzimy jeszcze porównania odtłumika ze wzmacniakiem jednotorowym:

1. pod względem wpływu odchylenia oporności wejściowej toru od wartości przepisanej na własności wzmocnieniowe urządzenia,
2. pod względem wpływu tegoż odchylenia na stabilność urządzenia.

Porównania te, mające zasadnicze znaczenie, przeprowadzimy na przykładzie odtłumika wzdłużnego typu łukowego, posługując się przy tym pojęciem wzmocności wtrąceniowej dla scharakteryzowania własności wzmocnieniowych zarówno odtłumika, jak i wzmacniaka jednotorowego. Dla uproszczenia rozważań przyjmiemy, że wszystkie wchodzące w grę parametry są wielkościami rzeczywistymi oraz że oporności wejściowe obu odcinków toru są jednakowe ($S=W$) i że wobec tego odchylają się one w jednakowy sposób od wartości przepisanej, równej oporności falowej Z toru.

Odtłumik scharakteryzujemy jego opornością — Z_{ow} , a wzmacniak jednotorowy jego opornością falową Z , równą oporności falowej toru, i wzmocnością falową K . Przyjmujemy przy tym, że wzmacniak jest czwórnikiem oporowo i energetycznie symetrycznym.

W przypadku idealnym ($S=W=Z$) pozwalającym na otrzymanie żądanej wzmocności wtrąceniowej K_w , wzmocność wtrąceniowa odtłumika

wyrazi się zależnością (22)

$$K_w = \ln \left[\frac{1}{1-k} \right], \quad (45)$$

jeżeli

$$k = \frac{Z_{ow}}{S+W} = \frac{Z_{ow}}{2Z}, \quad (46)$$

(przy czym $k < 1$), podczas gdy wzmacność wtęceniowa wzmacniaka jednorodnego będzie oczywiście równa jego wzmacności falowej K , czyli

$$K_w = K. \quad (47)$$

Jeżeli oporności wejściowe obu odcinków toru, zawierającego odłumik, doznają pewnego przyrostu przybierając wartości S i $W=S$ różne od Z , tak iż

$$\frac{S}{Z} = \frac{W}{Z} = \kappa \neq 1 \quad (48)$$

(na przykład wskutek tego, iż oporności źródła i odbiornika różnią się od oporności falowej toru), to wzmacność wtęceniowa odłumika będzie

$$K'_w = \ln \left[\frac{1}{1-k'} \right], \quad (49)$$

jeżeli

$$k' = \frac{Z_{ow}}{S+W} = \frac{Z_{ow}}{2S} = \frac{Z_{ow}}{2\kappa Z} = \frac{k}{\kappa}. \quad (50)$$

Zatem

$$K'_w = \ln \left[\frac{1}{1 - \frac{k}{\kappa}} \right]. \quad (51)$$

Ponieważ jednak ze wzoru (45) wynika

$$k = 1 - e^{-K_w}, \quad (52)$$

przeto

$$K'_w = \ln \left[\frac{1}{1 - \frac{1 - e^{-K_w}}{\kappa}} \right]. \quad (53)$$

Przyrost Δ wzmacności wtęceniowej odłumika, wywołany zmianą oporności wejściowej odcinków toru, będzie zatem

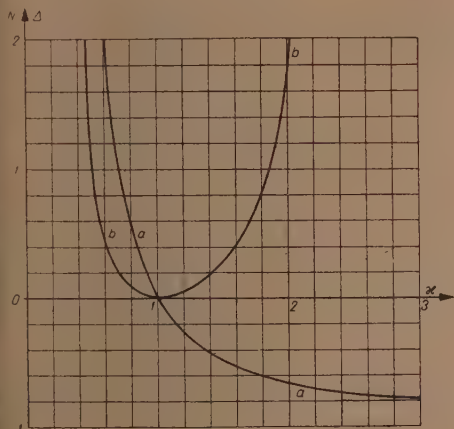
$$\Delta = K'_w - K_w = \ln \left[\frac{1}{1 - \frac{1 - e^{-K_w}}{\kappa}} \right] - K_w. \quad (54)$$

Jeżeli oporności wejściowe obu odcinków toru, zawierającego wzmacniak jednotorowy, przybiorą wartości S i $W=S$ spełniające warunek (48), to wzmocność wtrąceniową wzmacniaka będzie można wyrazić zależnością ⁷

$$\begin{aligned} K'_w &= K_w - 2 \ln \frac{S+Z}{2\sqrt{SZ}} - \ln \left[1 - \left(\frac{S-Z}{S+Z} \right)^2 e^{2K_w} \right] = \\ &= K_w - 2 \ln \frac{\kappa+1}{2\sqrt{\kappa}} - \ln \left[1 - \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right)^2 e^{2K_w} \right] = \\ &= K_w - \ln \frac{(\kappa+1)^2 - (\kappa-1)^2 e^{2K_w}}{4\kappa}, \end{aligned} \quad (55)$$

a więc przyrost Δ — zależnością

$$\Delta = K'_w - K_w = - \ln \frac{(\kappa+1)^2 - (\kappa-1)^2 e^{2K_w}}{4\kappa}. \quad (56)$$



Rys. 18. Przyrost $\Delta = K'_w - K_w$ wzmocności wtrąceniowej odtłumika (krzywa a) i wzmacniaka jednotorowego (krzywa b) w funkcji zredukowanej oporności wejściowej toru

$$\kappa = \frac{S}{Z} = \frac{W}{Z} \text{ dla } K_w = 1.$$

Jak widać, porównanie odchylenia oporności wejściowych toru (od wartości przepisanej) na własności wzmocnieniowe urządzenia sprowadza się do wzajemnego porównania zależności (54) i (56). Zależności te są uwidocznione na rys. 18 dla szczególnego przypadku, gdy pierwotna wzmocność wtrąceniowa urządzenia (przed zmianą oporności wejściowych toru) jest $K_w = 1N$. Widzimy, że odtłumik jest bardziej niż wzmacniak wrażliwy na odchylenia oporności wejściowych toru od wartości przepisanej.

Analizując wartość pochodnej funkcji (54) i funkcji (56)

dla $\kappa=1$ stwierdzilibyśmy, że w przypadku odtłumika

$$\left[\frac{d\Delta}{d\kappa} \right]_{\kappa=1} = 1 - e^{K_w}, \quad (57)$$

⁷ Patrz [7], s. 182, wzór (4.105).

a w przypadku wzmacniaka

$$\left[\frac{d\Delta}{d\kappa} \right]_{\kappa=1} = 0 \quad (58)$$

niezależnie od wartości wzmocności K_w . Oznacza to, że wrażliwość odłumika na odchylenia oporności wejściowych toru stają się tym większe, im większa jest wartość K_w , podczas gdy w bezpośrednim sąsiedztwie punktu $\kappa=1$ odchylenia te nie mają praktycznego wpływu na wzmocność wtrąceniową wzmacniaka.

Przechodząc z kolei do zanalizowania wpływu odchylenia oporności wejściowych toru (od wartości przepisanej) na stabilność urządzenia, wyobraźmy sobie, że zmieniamy oporności wejściowe S i $W=S$ dopóty, dopóki nie wywołamy oscylacji.

Łatwo spostrzec, że w przypadku odłumika (wzdłużnego, łukowego) oscylacje te następują, gdy osiągnięta zostanie wartość

$$\kappa_{osc} = \frac{\frac{1}{2} Z_{ow}}{Z} = k, \quad (59)$$

czyli, zgodnie ze wzorem (45), gdy osiągnięta będzie wartość

$$\kappa_{osc} = 1 - e^{-K_w}. \quad (60)$$

Jak widać, w przypadku odłumika należy obawiać się jedynie zmniejszenia oporności wejściowych toru i to tym bardziej, im większa jest pierwotna wzmocność wtrąceniowa K_w odłumika.

W przypadku wzmacniaka jednotorowego oscylacje powstaną wtedy, gdy oporności wejściowe obu odcinków toru zmienią się na tyle, iż (przy niezmienionej wartości Z oporności równoważników) zostanie spełniona równość⁸

$$K_w = \ln \frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}}, \quad (61)$$

jeżeli pierwotna wzmocność wtrąceniowa wzmacniaka $K_w=K$ i jeżeli q_1 i q_2 oznaczają współczynniki nie zrównoważenia torów z obu stron wzmacniaka; jak wiadomo

$$q_1 = \left| \frac{S-Z}{S+Z} \right|, \quad q_2 = \left| \frac{W-Z}{W+Z} \right|. \quad (62)$$

⁸ Patrz [6], s. 58—61.

Wobec przyjętego poprzednio założenia, że obie oporności wejściowe zmieniają się w sposób jednakowy,

$$W=S,$$

a zatem

$$q_1=q_2=q$$

oraz

$$K_w = \ln \left| \frac{S+Z}{S-Z} \right| = \ln \left| \frac{\kappa_{osc} + 1}{\kappa_{osc} - 1} \right|.$$

Stąd

$$\kappa_{osc} = \left[\frac{e^{K_w} + 1}{e^{K_w} - 1} \right]^{\pm 1} = \left[\operatorname{th} \frac{K_w}{2} \right]^{\mp 1}. \quad (63)$$

Ponieważ zawsze $\operatorname{th} \frac{K_w}{2} < 1$, przeto należy się obawiać zarówno

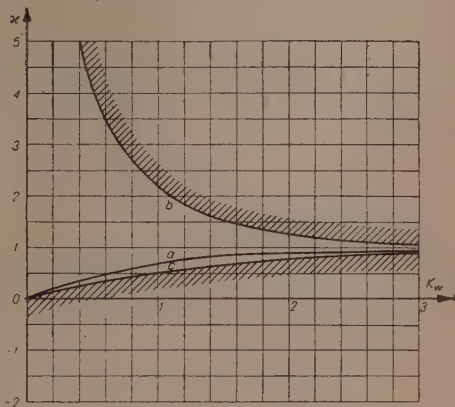
zwiększenia oporności wejściowych toru (górny znak w wykładniku potęgi), jak i zmniejszenia (dolny znak) i to tym bardziej, im większa jest pierwotna wzmocność wtrąceniowa K_w wzmacniaka.

Jak widać, porównanie wpływu odchylenia oporności wejściowych toru (od wartości przepisanej) na stabilność urządzenia sprowadza się do porównania ze sobą zależności (60) i (63). Zależności te są uwidocznione na rys. 19, z którego wynika, że odtłumik jest bardziej niż wzmacniak wrażliwy na zmniejszenie oporności wejściowych toru.

Reasumując wyniki przeprowadzonego porównania stwierdzamy, że pod obu rozpatrywanymi względami odtłumik ustępuje wzmacniakowi jednorodnemu.

Fakt bowiem, że obszar pracy odtłumika nie ma granicy górnej, nie przemawia specjalnie na korzyść odtłumika, gdyż odchylenia oporności wejściowych toru od wartości przepisanej zachodzą zarówno w kierunku ich wzrostu, jak i w kierunku ich malenia.

Okoliczność, iż odtłumik (w przeciwieństwie do wzmacniaka jednorodnego) nie zawiera równoważników, może wywoływać złudzenie, iż jest on bardziej stabilny od wzmacniaka jednorodnego. Przytoczone rozmo-



Rys. 19. Granice obszarów stabilności odtłumika i wzmacniaka jednorodnego w układzie (K_w, x) : krzywa a — dolna granica obszaru stabilności odtłumika, b — górna i c — dolna granica obszaru stabilności wzmacniaka.

wanie powinno rozwiązać to złudzenie. Zamiast równoważników występuje bowiem w każdym odtłumiku cechownik. Chociaż rola cechownika jest inna niż rola równoważników, to jednak praktyczna niemożliwość użycia dowolnie skomplikowanego cechownika, jak również praktyczna niemożliwość każdorazowego dostosowywania oporności zespolonej cechownika do nieuniknionych zmian oporności wejściowych toru (na przykład zachodzących na skutek zmian temperatury) ograniczają, jak widać, w znacznym stopniu stabilność odtłumika.

Ze znaczną zależnością wzmocnienia wtrąceniowej odtłumika od oporności wejściowych toru wiąże się jeszcze inna wada odtłumika, a mianowicie — większe zniekształcenia tłumieniowe, co może być wystarczająco uzasadnione wynikiem rozważań zawartych w rozdziale 6.

Do podobnych wniosków doszlibyśmy, gdybyśmy zrezygnowali z poprzedniego uczynionego założenia, iż wszystkie wchodzące w grę parametry wyrażają się liczbami rzeczywistymi, jak również gdybyśmy rozpatrywali jeszcze odtłumiki innych rodzajów.

Jeżeli więc w pewnych warunkach jest rzeczą słuszną oddać pierwszeństwo odtłumikowi, to jest to uzasadnione innymi jego zaletami, przede wszystkim zaś zdolnością przekazywania sygnałów zewowych i impulsów wybierania automatycznego bez stosowania specjalnych urządzeń obejściowych, jak również ewentualną możliwością zrealizowania urządzenia wzmacniającego w sposób prostszy, mianowicie przy użyciu mniejszej liczby elementów i przy mniejszych wymiarach. Bądź co bądź wprowadzenie odtłumików do ruchu w określonych przypadkach prawdopodobnie pozwoli zaoszczędzić znaczne ilości miedzi.

*Katedra Przenoszenia Przewodowego
Politechniki Warszawskiej*

WYKAZ LITERATURY

1. Crisson G. — Negative impedance and the twin-21-type repeater. *Bell Syst. Techn. J.* July, 1931.
2. Ginzton E. L. — Stabilized negative impedances. *Electronics*, July, 1945.
3. Merrill J. L. — A negative impedance repeater. *Transactions of A. I. E. E.* vol. 70, part 1, 1951.
4. Merrill J. L. — Theory of the negative impedance converter. *Bell Syst. Techn. J.* vol. 30, January 1951.
5. Nowicki W. — Podstawy techniki przenoszenia przewodowego. *Transformator Telekomunikacyjny*, zeszyt 4, 1948 (skrypt).
6. Nowicki W. — Podstawy techniki przenoszenia przewodowego. Zeszyt 6, 1949 (skrypt).
7. Nowicki W. *Zasady teletransmisji przewodowej* T. 1, 1953.
8. Nyquist H. — Regeneration theory. *Bell Syst. Techn. J.* January 1932.
9. Rizkin A. A. — Osnovy teorii usilitel'nykh schiem. Moskwa, 1951.
10. Rothe H., Kleen W. — Elektronenröhren als Schwingungserzeuger und Gleichrichter. Lipsk 1941.

В. НОВИЦКИ

УСИЛИТЕЛИ, ДЕЙСТВИЕ КОТОРЫХ ОСНОВАНО НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОЛНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ — УСИЛИТЕЛИ „0“

Резюме

1. Вступление

Существует возможность получения двустороннего усиления при помощи метода отличающегося от до сих пор применяемого, а именно при помощи включения отрицательного полного сопротивления либо в проводы линии (продольное включение), либо между проводами линии (поперечное включение). Отрицательное полное сопротивление мы можем получить при помощи ламповой схемы — при одновременном использовании положительной обратной связи. Основанные на этом принципе устройства будем в дальнейшем сокращённо называть *усилителями „0“* (автор предлагает польский термин „odtłumik“). Полоса частоты, в которой имеет место уменьшенное затухание линии названа „полосой уменьшенного затухания“.

В настоящем труде рассмотрены линии снабженные только одним усилителем „0“

2. Свойства двухполюсника, производящего отрицательное полное сопротивление..

Каждый двухполюсник, производящий отрицательное полное сопротивление (отрицательное активное сопротивление — R , отрицательную индуктивность — L , отрицательную ёмкость — C или какое бы то ни было соединение этих величин) мы можем представить как четырёхполюсник, содержащий трансформатор с мнимым коэффициентом трансформации

$$\hat{p} = p e^{j\frac{\pi}{2}} = jp \quad (1)$$

нагруженный полным сопротивлением, которое названо *отличителем усилителя „0“* и состоит из любого соединения положительных величин R , L и C , т. е. пассивных элементов. В идеальном случае названный четырёхполюсник тождествен с идеальным трансформатором (не содержащим ничего более); в связи с этим полное сопротивление двухполюсника равно

$$\hat{W}_a = \frac{\hat{Z}_\beta}{(jp)^2} = -\frac{\hat{Z}_\beta}{p^2} \quad (2)$$

где \hat{Z}_β является полным сопротивлением отличителя, т. е. отрицательным полным сопротивлением.

Оказывается, что такая система действует в двух направлениях: и так можно к зажимам, на которых имеется сопротивление \hat{W}_a присоединить отличитель с сопротивлением \hat{Z}_a и тогда на зажимах четырёхполюсника, к которым был первоначально присоединён отличитель с сопротивлением \hat{Z}_β появится теперь отрицательное полное сопротивление

$$\hat{W}_\beta = (jp)^2 \hat{Z}_a = -p^2 \hat{Z}_a \quad (3)$$

В действительности — обсуждаемый четырёхполюсник содержит кроме идеального трансформатора ещё и другие элементы, вследствие присутствия которых зависимости (2) и (3) осуществляются с большим или меньшим приближением.

Два полученные этим путём отрицательные полные сопротивления принципиально отличаются друг от друга: одно из них — типа *дугового*, другое же — *динаatronного* типа.

Независимо от того, является ли \hat{Z}_β отличителем усилителя „0“ а \hat{Z}_α — внешним сопротивлением, присоединённым к зажимам усилителя „0“, на которых имеется сопротивление \hat{W}_α или же \hat{Z}_β является внешним сопротивлением, присоединённым к зажимам, на которых, имеется сопротивление \hat{W}_β , а \hat{Z}_α — является сопротивлением отличителя, обязательно следующее условие „абсолютной стабильности“, вытекающее из общего условия стабильности Найквиста; а именно

$$\left| \frac{\hat{Z}_\beta}{p^2 \hat{Z}_\alpha} \right| < 1$$

для всех частот, при которых полные сопротивления \hat{Z}_α и \hat{Z}_β имеют одинаковые аргументы.

Из этого условия следует, что для получения устойчивого действия двухполюсника, производящего отрицательное полное сопротивление, необходимо, чтобы сопротивление видимое двухполюсником не было слишком мало, если отрицательное полное сопротивление двухполюсника типа „дуги“. и чтобы сопротивление видимое двухполюсником не было слишком велико если сопротивление двухполюсника — динатронное. Наглядно выражаясь, можно утверждать, что отрицательное сопротивление типа дуги „боится“ слишком малых сопротивлений нагрузки, а динатронное отрицательное сопротивление „боится“ слишком больших сопротивлений нагрузки.

3. Классификация усилителей „0“

В зависимости от способа включения усилителей „0“ в линию и рода отрицательного сопротивления усилителя „0“ различают четыре рода усилителей „0“: 1. продольный усилитель „0“ типа дуги 2. продольный усилитель „0“ динатронного типа, 3. поперечный усилитель „0“ типа дуги и 4. поперечный усилитель „0“ динатронного типа.

4. Вносимое усиление усилителя „0“

Пользуясь определением вносимого усиления равного, как известно, вносимому затуханию, но взятому с обратным знаком, можно доказать, что вносимое усиление усилителя „0“ выражается формулой

$$K_w = \ln \left| \frac{1}{1 - \hat{k}} \right|, \quad (4)$$

если для продольного усилителя „0“

$$\hat{k} = \hat{k}_w = \frac{\hat{Z}_{ovw}}{\hat{S} + \hat{W}} \quad (5)$$

и для поперечного усилителя „0“

$$\hat{k} = \hat{k}_p = \frac{1}{\hat{Z}_{op}} \cdot \frac{\hat{S} \hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}} \quad (6)$$

причём $-\hat{Z}_{ovw}$ и $-\hat{Z}_{op}$ обозначают входные полные сопротивления тех участков линии, между которыми включён усилитель „0“.

Желая получить требуемую зависимость вносимого усиления от частоты, следует так рассчитать отличитель усилителя „0“, чтобы величина $\hat{k} = \hat{k} e^{j\varphi_k}$ изменялась соответственным образом вместе с частотой. Так напр. для получения вносимого усиления, независимого от частоты, должно быть

$$1 - 2k \cos \varphi_k + k^2 = e^{-2k_w} = \text{const.} \quad (7)$$

Можно в частном случае принять $\varphi_k=0$ и тогда вместо условия (7) мы получим

$$\varphi_k=0$$

$$\hat{k}=k=1 \pm e^{-K_w} = \text{const.} \quad (8)$$

5. Стабильность и область действия усилителей „0”

Если величина $\hat{k}=k=\text{const}$ то из условия стабильности системы вытекает, что для случая продольного усилителя „0” динаatronного типа должно быть соблюдено условие $\hat{k}=k_w > 1$ а для случая продольного усилителя „0” типа дуги $k=k_w < 1$.

При применении поперечных усилителей „0” должны быть соблюдены условия $\hat{k}=k_p > 1$ для усилителя типа дуги, и $\hat{k}=k_p < 1$ для усилителя динаatronного типа.

Область $k < 1$ мы называем областью А а область $k > 1$ — областью В работы усилителей „0”, В каждой из этих областей можно в принципе получить каждое требуемое усиление, так как согласно формуле (4) одно и то же вносимое усиление получается как при некотором значении \hat{k} , так и при значении $2-\hat{k}$.

Если величина \hat{k} является функцией частоты, то удобно условию стабильности придать следующую графическую интерпретацию. Пусть в прямоугольной системе координат ($k \cos \varphi_k$, $k \sin \varphi_k$) т. е. в полярной системе (k , φ_k) представлены кривые для $K_w = \text{const}$, вытекающие из уравнения (4) (рис. 15). Кривые эти являются кругами. Вычертим на этой диаграмме геометрическое место величин \hat{k} данного усилителя „0” для разных частот. Тогда кривая m может иметь точки, общие с отрезком оси абсцисс, принадлежащим к области А, если мы имеем дело либо с продольным усилителем „0” типа дуги, либо с поперечным усилителем „0” динаatronного типа, однако она не должна иметь общих точек с отрезком оси абсцисс, принадлежащим к области В. Напротив, если мы имеем дело либо с продольным усилителем „0” динаatronного типа, либо с поперечным усилителем „0” типа дуги, то кривая m может иметь общие точки с отрезком принадлежащим к области В, и не может иметь общих точек с отрезком принадлежащим к области А.

6. Амплитудные искажения и потолок усиления усилителя „0”

Возможно доказать, что колебания кривых входных сопротивлений \hat{S} и \hat{W} линии в функции частоты (или другие причины вызывающие зависимость величины \hat{k} от частоты) вызывают тем большие амплитудные искажения усилителя „0”, чем больше среднее значение вносимого усиления в полосе уменьшения затухания. Отсюда следует, что для данных колебаний кривых входных сопротивлений и для данного допускаемого значения амплитудных искажений — всегда существует наибольшее возможное среднее вносимое усиление, называемое автором потолком усиления усилителя „0”.

7. Сопоставление разных родов усилителей „0”

Приведено сравнение 4 родов усилителей „0” (см. п. 3):

1. с точки зрения их поведения при коммутационных процессах,
2. с точки зрения прохождения импульсов автоматического набора и вызовных сигналов через усилитель „0”.

Из первого сравнения следует, что решение относительно выбора усилителя „0” типа дуги или динаatronного типа зависит от того, предвидится ли вблизи усилителя „0” разрывание или короткое замыкание линии.

В первом случае (т. е. разрыва линии) рекомендуется применение усилителя „0” типа дуги, во втором же (короткое замыкание линии) — динаatronного типа. Если коммутационные процессы вообще не предусматриваются или если одновременно с ними происходит выключение усилителя „0” из линии, то с этой точки зрения выбор типа безразличен.

Из второго сравнения следует, что в случае посылки импульсов автоматического набора или вызовных сигналов применение поперечного усилителя „0“ не является целесообразным ввиду того, что тогда затруднительно получить достаточно большое сопротивление усилителя „0“ при низких частотах.

8. Сравнение усилителя „0“ с двухпроводным усилителем

Приведены сравнения усилителя „0“ с двухпроводным усилителем;

1. с точки зрения амплитудных искажений и

2. с точки зрения стабильности.

Из первого сравнения следует, что усилитель „0“ чувствительнее двухпроводного усилителя к колебаниям входного сопротивления линии в функции частоты, которые в усилителе „0“ вызывают большие или значительно большие амплитудные искажения.

Из второго сравнения следует, что стабильность усилителя „0“ ограничена только „с одной стороны“, тогда как стабильность двухпроводного усилителя ограничена с обеих сторон: а именно усилитель „0“ „боится“ или слишком малых или слишком больших входных сопротивлений линии, тогда как двухпроводный усилитель „боится“ и слишком малых и слишком больших входных сопротивлений. Однако же область односторонней стабильности (напр. в направлении меньших входных сопротивлений — при продольном усилителе „0“ типа дуги) для усилителя „0“ меньше чем для двухпроводного усилителя.

В итоге можно утверждать, что назначение описанных усилителей „0“ будет вероятно ограничено; главные их преимущества состоят в возможности передачи вызовных сигналов и импульсов автоматического набора без необходимости применения дополнительных обходных устройств, а также, быть может, более простая конструкция и меньшие размеры. Так или иначе, введение их позволит вероятно сэкономить значительное количество меди.

W. NOWICKI

RÉPÉTEURS DONT L'ACTION EST FONDÉE SUR LA MISE À PROFIT DE L'IMPÉDANCE NÉGATIVE

(„DÉSAlFAIBLISSEURS“)

Résumé

1. Introduction

Il est possible de réaliser une amplification à deux sens sur un principe différent de celui employé jusqu'à présent, notamment par insertion d'impédances négatives dans les fils de ligne de télécommunication (insertion longitudinale) ou entre les fils de cette ligne (insertion transversale).

On peut obtenir l'impédance négative à l'aide d'un système de lampes en utilisant simultanément une réaction négative et positive. L'auteur donne aux dispositifs amplifiant qui agissent sur ce principe le nom de „désaffaiblisseurs“ et aux lignes de télécommunication munies d'un ou de plusieurs désaffaiblisseurs le nom de „lignes désaffaiblies“. La bande des fréquences dans laquelle a lieu le désaffaiblissement est appelée „bande de désaffaiblissement“.

L'article présente les considérations sur des lignes désaffaiblies à un seul désaffaiblisseur.

2. Propriétés du dipôle réalisant l'impédance négative

Chaque dipôle réalisant une impédance négative (résistance négative — R , inductance négative — L , capacité négative — C , ou une combinaison quelconque de ces grandeurs), peut être présenté comme un quadripôle contenant un transformateur idéal à coefficient de transformation imaginaire

$$\hat{p} = p e^{j\frac{\pi}{2}} = jp \quad (1)$$

chargé d'une impédance, appelée „caractériseur“ du désaffaiblisseur, et représentant une combinaison quelconque des grandeurs R , L , C — positives, donc d'éléments passifs. Dans le cas idéal ce quadripôle est identique à un transformateur idéal ne contenant rien de plus, d'où il s'ensuit que l'impédance du dipôle est

$$\hat{W}_a = \frac{\hat{Z}_\beta}{(jp)^2} = -\frac{\hat{Z}_\beta}{p^2} \quad (2)$$

ou \hat{Z}_β est l'impédance du caractériser; c'est donc une impédance négative.

Il se trouve que l'action d'un système pareil est à deux sens; on peut connecter un caractériser à l'impédance \hat{Z}_a aux bornes où apparaissait une impédance \hat{W}_a , et alors il apparaîtra une impédance négative

$$\hat{W}_\beta = (jp)^2 \hat{Z}_a = -p^2 \hat{Z}_a \quad (3)$$

sur les bornes du quadripôle, auxquelles le caractériser à l'impédance \hat{Z}_β était connecté précédemment.

En réalité sauf le transformateur idéal de quadripôle en question contient aussi d'autres éléments qui causent que les relations (2) et (3) ne sont remplies qu'avec une certaine approximation.

Les deux impédances négatives ainsi réalisées, diffèrent d'une façon fondamentale: tandis que l'une est du type „arc“ l'autre est du type „dynatron“.

Il est indifférent que \hat{Z}_β soit le caractériser du désaffaiblisseur et \hat{Z}_a l'impédance extérieure connectée aux bornes du désaffaiblisseur sur lesquelles apparaît l'impédance \hat{W}_a , ou que \hat{Z}_β soit l'impédance extérieure connectée aux bornes sur lesquelles apparaît l'impédance \hat{W}_β , et \hat{Z}_a l'impédance du caractériser — la condition suivante de la stabilité absolue, qui résulte de la condition générale de stabilité de Nyquist est aussi valable ici, d'où

$$\left| \frac{\hat{Z}_\beta}{p^2 \hat{Z}_a} \right| < 1$$

pour toutes les fréquences, pour lesquelles les impédances \hat{Z}_a et \hat{Z}_β ont les mêmes arguments.

Il résulte de cette condition que pour obtenir une stabilité de travail du dipôle, réalisant une impédance négative, il faut que l'impédance que „voit“ le dipôle, ne soit pas trop petite, si l'impédance négative du dipôle est du type „arc“ et — pas trop grande, si l'impédance négative du dipôle est du type „dynatron“.

En d'autres termes on peut constater que l'impédance négative du type arc „craint“ les impédances de charge trop petites et l'impédance négative du type „dynatron“ — „craint“ les impédances de charge trop grandes.

3. Classification des désaffaiblisseurs

Suivant la façon de mise en circuit des désaffaiblisseurs et le type d'impédance négative nous distinguons 4 types de désaffaiblisseurs:

1. désaffaiblisseur longitudinal du type „arc“,
2. désaffaiblisseur longitudinal du type „dynatron“,
3. désaffaiblisseur transversal du type „arc“ et
4. désaffaiblisseur transversal du type „dynatron“.

4. Gain d'insertion du désaffaiblisseur

Vu la définition du gain d'insertion du quadripôle, qui est égale (comme on le sait) à l'affaiblissement d'insertion avec signe inverse, nous pouvons démontrer que le gain d'insertion du désaffaiblisseur, inséré dans la ligne s'exprime par la formule

$$K_w = \ln \left| \frac{1}{1 - \hat{k}} \right|, \quad (4)$$

si pour le désaffaiblisseur longitudinal

$$\hat{k} = \hat{k}_w = \frac{\hat{Z}_{ov}}{\hat{S} + \hat{W}}, \quad (5)$$

et pour le désaffaiblisseur transversal

$$\hat{k} = \hat{k}_p = \frac{1}{\hat{Z}_{op}} \cdot \frac{\hat{S} \hat{W}}{\hat{S} + \hat{W}}, \quad (6)$$

où $-\hat{Z}_{ov}$ et $-\hat{Z}_{op}$ sont les impédances d'entrée des sections de ligne, entre lesquelles le désaffaiblisseur a été inséré.

Pour obtenir la relation désirée du gain d'insertion du désaffaiblisseur en fonction de la fréquence, nous devons calculer la caractéristique du désaffaiblisseur de façon à ce que la grandeur $k = ke^{i\varphi_k}$ change d'une façon convenable avec la fréquence.

Ainsi, pour obtenir un gain d'insertion indépendant de la fréquence, il faut que

$$1 - 2 \cos \varphi_k + k^2 = e^{-2K_w} = \text{const.} \quad (7)$$

Dans le cas particulier, où nous admettons $\varphi = 0$, nous obtenons au lieu de la condition (7):

$$\begin{aligned} \varphi_k &= 0 \\ \hat{k} = k &= 1 \pm e^{-K_w} = \text{const.} \end{aligned} \quad (8)$$

5. Stabilité et rayon d'action des désaffaiblisseurs

Il résulte de la condition de stabilité du système que si la grandeur

$$\hat{k} = k = \text{const.},$$

nous devons avoir $k = k_w > 1$, pour le cas du désaffaiblisseur longitudinal du type dynatron, et $k = k_w < 1$ pour le cas du désaffaiblisseur longitudinal du type arc.

Si nous appliquons des désaffaiblisseurs transversaux, nous devons avoir $k = k_p > 1$ pour les désaffaiblisseurs du type arc et $k = k_p < 1$ pour les désaffaiblisseurs du type dynatron.

Nous appelons le rayon d'action du désaffaiblisseur pour $k < 1$ — rayon A, et pour $k > 1$ — rayon B.

Dans chacun de ces rayons nous pouvons obtenir en principe chaque gain d'insertion désiré, puisqu'il ressort de la formule (4), qu'on obtient le même gain d'insertion pour une certaine valeur de \hat{k} que pour la valeur $2 - \hat{k}$.

Si la valeur \hat{k} est une fonction de la fréquence il est utile de conférer à la condition de stabilité l'interprétation graphique suivante:

Portons sur un système rectangulaire de coordonnées ($k \cos \varphi_k$, $k \sin \varphi_k$), donc sur un système polaire (k , φ_k) des courbes pour $K_{in} = \text{const}$ résultant de l'équation (4), v. fig. 15. Ces courbes ont la forme des cercles. Portons sur ce diagramme le lieu géométrique m des grandeurs \hat{k} du désaffaiblisseur donné pour diverses fréquences. Pour le désaffaiblisseur longitudinal du type arc ou pour le désaffaiblisseur transversal du type dynatron, la courbe m peut avoir des points communs avec le secteur de l'axe des abscisses, appartenant au rayon A, mais elle ne doit pas avoir de points communs avec le secteur de l'axe des abscisses appartenant au rayon B. Pour le désaffaiblisseur longitudinal du type dynatron ou pour le désaffaiblisseur transversal du type arc, la courbe m peut avoir au contraire des points communs avec le secteur appartenant au rayon B, mais elle ne doit pas en avoir avec celui du rayon A.

6. Distorsions d'affaiblissement et plafond du gain d'insertion du désaffaiblisseur

On peut démontrer que les „oscillations“ des courbes d'impédance d'entrée \hat{S} et \hat{W} de la ligne en fonction de la fréquence (et d'autres facteurs d'où il résulte que la grandeur \hat{k} dépend de la fréquence) causent des distorsions d'affaiblissement du désaffaiblisseur d'autant plus grandes, que la valeur moyenne du gain d'insertion obtenue dans la bande de désaffaiblissement est plus grande.

Il en résulte que — pour des oscillations données des courbes d'impédance d'entrée et pour une valeur admissible donnée de distorsions d'affaiblissement — il existe toujours un gain d'insertion moyen maximum que l'auteur appelle „plafond de gain d'insertion du désaffaiblisseur“.

7. Comparaison des différents types de désaffaiblisseurs:

On a comparé 4 types différents de désaffaiblisseurs (voir le p. 3)

1. Au point de vue de leur comportement pendant les procès de commutation et
2. Au point de vue du passage des impulsions d'appel automatique et des signaux d'appel par le désaffaiblisseur.

Il résulte de la première comparaison que le choix du type arc ou du type dynatron du désaffaiblisseur dépend de la question si l'on envisage une interruption ou un court-circuit de la ligne à proximité du désaffaiblisseur. Pour le premier cas (interruption), il est désirable employer le type arc et le type dynatron — pour le second (court circuit). Si les procès de commutation ne sont pas envisagés, ou si lors de ces opérations le désaffaiblisseur est simultanément mis hors circuit, le choix du genre de désaffaiblisseur à ce point de vue est indifférent.

Il résulte de la seconde comparaison que si l'on envisage la transmission de signaux d'appel l'emploi d'un désaffaiblisseur transversal n'est pas indiqué, à cause de la difficulté de réalisation du désaffaiblisseur à impédance suffisamment élevée à basses fréquences.

8. Comparaison du désaffaiblisseur avec le répéteur à deux fils

On a fait les comparaisons du désaffaiblisseur avec un répéteur à deux fils au point de vue:

1. des distorsions d'affaiblissement,
2. de la stabilité.

Il résulte de la première comparaison que le désaffaiblisseur est plus sensible que le répéteur aux oscillations de l'impédance d'entrée en fonction de la fréquence: elles causent des distorsions d'affaiblissement plus grandes ou beaucoup plus grandes pour le désaffaiblisseur que pour le répéteur.

La seconde comparaison nous montre que la stabilité du désaffaiblisseur n'est limitée que „d'une part“ tandis que la stabilité du répéteur est limitée „des deux“: le désaffaiblisseur „craint“ les impédances d'entrée de la ligne trop petites, ou trop grandes, tandis que le répéteur „craint“ aussi bien, les impédances d'entrée trop petites que trop grandes. Cependant l'espace de stabilité à un sens (par exemple dans le sens de réduction des impédances d'entrée — pour le désaffaiblisseur longitudinal du type arc) est plus petit pour le désaffaiblisseur que pour le répéteur à deux fils. A ce point de vue le premier est donc inférieur au second.

En résumé on peut constater que les désaffaiblisseurs décrits ci — dessus auront probablement une application limitée. Leur qualités principales consistent à pouvoir transmettre des signaux d'appel et des impulsions d'appel automatique sans avoir recours à des dispositifs de détour; leur construction est plus simple et leurs dimensions réduites. Cependant leur application pratique permettre probablement d'économiser des quantités de cuivre considérables.

R. KULIKOWSKI

Wyznaczanie optymalnych parametrów układów liniowych na podstawie charakterystyk czasowych

Rękopis dostarczono 20. 9. 1954

Rozpatrzono metody obliczania układów liniowych na podstawie charakterystyk czasowych. Optymalne parametry układu określono z warunków najlepszego przybliżenia charakterystyk czasowych w metryce określonej przestrzeni funkcyjnej. Wybór odpowiedniej przestrzeni uzależnia się od przyjętego kryterium zniekształceń. Rozpatrzono przybliżenie w przestrzeni C , L i L^2 oraz szereg konkretnych przykładów, jak na przykład obliczanie pewnych wzmacniaczy impulsów (szerokopasmowych i rezonansowych) oraz układu automatycznej regulacji.

1. WSTĘP

Przy projektowaniu liniowych układów dynamicznych jest stawiane wymaganie, aby zaprojektowany układ miał określone własności. Własności te wyraża się zwykle w postaci charakterystyk układu. Na przykład wymaganie nieznieskształconego przekazywania sygnałów częstotliwości akustycznych pociąga za sobą konieczność urzeczywistnienia układu o stałej charakterystyce amplitudy w zakresie przenoszzonego pasma częstotliwości. Wymaganie to jest wystarczające, ponieważ reakcja ucha ludzkiego na sygnał akustyczny wykazuje zależność logarytmiczną od zmian amplitudy sygnału, a prawie zupełnie nie zależy od jego fazy. W przypadku innych sygnałów, do odtworzenia nieznieskształconego sygnału na wyjściu układu wymaga się, aby i charakterystyka fazy miała przebieg liniowy.

Jednakże metody obliczania układów liniowych na podstawie charakterystyk częstotliwościowych nie dają jednoznacznych warunków określania parametrów układu. Na przykład przy projektowaniu wzmacniaczy szerokopasmowych wartości parametrów, odpowiadające optymalnej charakterystyce amplitudy, różnią się znacznie od wartości, które odpowiadają optymalnej charakterystyce fazy. Ponadto nie jest wyjaśnione, jaki powinien być optymalny przebieg charakterystyk częstotliwościowych

poza zakresem pasma częstotliwości przepuszczanych. Dlatego urządzenia zaprojektowane na podstawie charakterystyk częstotliwościowych (na przykład wzmacniacze rezonansowe, wzmacniacze szerokopasmowe itp.) nie dają gwarancji minimalnych zniekształceń w przypadku sygnałów rozpatrywanych jako funkcje czasu (np. sygnałów impulsowych). Trudności powyższe można ominąć, rozpatrując zniekształcenia sygnału w zakresie charakterystyk czasowych. Zwykle żądamy, aby zniekształcenie to było możliwie najmniejsze w danych warunkach. Żądanie to traci jednak wartość, jeśli nie podaje się odpowiedniego kryterium oceny zniekształceń.

W niniejszej pracy podano zastosowanie szeregu analitycznych kryteriów obliczania optymalnych parametrów układów liniowych.

Na wstępie wprowadzimy pewne proste pojęcia i określenia. W tym celu rozpatrzmy układ liniowy, którego odpowiedzią na sygnał wejściowy $e(t)$ jest $u(t)$. (Odpowiedź układu na $e(t) = 1(t)$ ¹ będziemy nazywali funkcją przejściową układu). Zarówno sygnał wejściowy, jak i wyjściowy można przedstawić jako wektor w pewnej przestrzeni liniowej [12]. Zatem postawione zagadnienie można sformułować w sposób teoretyczny następująco:

W pewnym przedziale czasowym T w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów dane są dwie funkcje: $e(t)$ i $u(t, k_1, k_2 \dots k_n)$ zmiennej t , przy czym u zależy jeszcze od pewnej liczby parametrów $k_1 \dots k_n$. Parametry te należy określić w ten sposób, by w przedziale czasowym T odchylenie funkcji $u(t, k_1 \dots k_n)$ od $e(t)$ było minimalne. Przy tym oczywiście należy zdefiniować, co rozumie się pod odchyleniem u od e lub tak zwaną odległością między tymi funkcjami. Jeśli na przykład ograniczymy się do rozpatrywania funkcji ciągłych w przedziale T , a jako kryterium, na podstawie którego będziemy oceniać tę odległość, wprowadzimy tak zwaną normę, którą określimy jako górną granicę modułu różnicy $\delta(t) = u(t) - e(t)$, to jest

$$\|\delta(t)\| = \max_{[T]} |\delta(t)|, \quad (1)$$

to otrzymamy pewną normowaną przestrzeń liniową. Przestrzeń tę, zgodnie z przyjętą symboliką, oznaczymy literą C . Inną przestrzeń otrzymamy, jeśli na przykład ograniczymy się do klasy funkcji całkowalnych a normę określimy wzorem

$$\|\delta(t)\| = \int_0^{\infty} |\delta(t)| dt. \quad (2)$$

Przestrzeń taką oznacza się symbolem L .

¹ $1(t)$ oznacza funkcję jednostkową.

Analogiczne w przypadku funkcji całkowalnych z kwadratem, gdzie norma jest określona wzorem

$$\|\delta(t)\| = \int_0^{\infty} [\delta(t)]^2 dt, \quad (3)$$

otrzymujemy przestrzeń oznaczoną symbolem L^2 .

Wprowadzenie normy, którą utożsamiamy z odległością między $u(t)$ i $e(t)$, pozwala nam w otrzymanej w ten sposób przestrzeni wykonywać operacje metryczne.

Przyjmijmy następujące określenie: parametry układu k_1, k_2, \dots, k_n , zapewniające optymalne przybliżenie w danej przestrzeni funkcyjnej charakterystyk czasowych $e(t)$ i $u(t)$, nazywamy optymalnymi parametrami tego układu.

Powstaje pytanie, czy istnieje jednoznaczna funkcja $u(t)$, znajdująca się na najmniejszej odległości w metryce odpowiedniej przestrzeni. Twierdzącą odpowiedź na to pytanie można znaleźć w pracach poświęconych teorii aproksymacji [1]. Wybór odpowiedniej przestrzeni, w której znajduje się optymalne parametry układów liniowych, należy uzależnić od charakteru i stopnia, w jakim są niepożądane zniekształcenia występujące w tym układzie.

Jeśli na przykład pożądane jest, aby bezwzględna wartość zniekształceń kształtu impulsu w zadanym przedziale czasowym osiągała minimum, najlepiej posługiwać się tzw. najlepszym przybliżeniem (lub przybliżeniem Czebyszewa) w metryce przestrzeni C .

W układach, w których o jakości przybliżenia może świadczyć pole zawarte między impulsem wejściowym i wyjściowym (w odpowiedniej skali), a więc w układach, gdzie zarówno czas narastania lub opóźnienia, jak i odchylenie są czynnikami jednakowo niepożądanymi, można stosować przybliżenie w metryce przestrzeni L .

W celu podkreślenia, w jakim stopniu są niepożądane bardzo duże odchylenia, można również zastosować przybliżenie w metryce przestrzeni L^2 , w której błąd rośnie z kwadratem jego wartości bezwzględnej. Wreszcie, jeśli w oddzielnych punktach przedziału czasu dopuszcza się możliwość istnienia różnych stopni przybliżenia, można zastosować tak zwane „przybliżenie oszacowane” określone przez „funkcję ważkości” $w(t)$.²

W przypadkach powyższych zamiast (1), (2), (3) otrzymamy

a. w przestrzeni C

$$\|\delta(t)\| = \max_{[T]} w(t) |\delta(t)|, \quad (1a)$$

² Jako funkcję ważkości można przyjąć następujące wyrażenia [3]:

$w(t)=t$; $w(t)=t^2$; $w(t)=e^{-at}$; $w(t)=1-e^{-at}$; $w(t)=1(t-\tau)$ itp.

b. w przestrzeni L

$$\|\delta(t)\| = \int_0^{\infty} w(t) |\delta(t)| dt, \quad (2a)$$

c. w przestrzeni L^2

$$\|\delta(t)\| = \int_0^{\infty} w(t) \delta^2(t) dt. \quad (3a)$$

W następnych rozdziałach na konkretnych przykładach przedstawimy metody określania optymalnych parametrów układów liniowych w przestrzeni C, L i L^2 .

2. PROJEKTOWANIE UKŁADÓW LINIOWYCH NA PODSTAWIE PRZYBLIŻENIA CHARAKTERYSTYK CZASOWYCH W METRYCE PRZESTRZENI C

W pracy [5] podano zasady projektowania różnych układów impulsowych na podstawie najlepszych przybliżeń charakterystyk czasowych. Dlatego też ograniczymy się tu do konkretnego przykładu.

Rozpatrzmy układ wzmacniacza, w którym korekcja zniekształceń czoła impulsów jest zrealizowana za pomocą sprzężenia zwrotnego prądowego. Układ tego rodzaju pokazano na rys. 1.

Nachylenie zastępcze lampy z uwzględnieniem sprzężenia przez oporność w katodzie $z_k = \frac{r_k}{1 + p r_k C_k}$ wyraża się przez

$$S_z = \frac{S}{1 + S z_k},$$

gdzie S jest nachyleniem lampy.

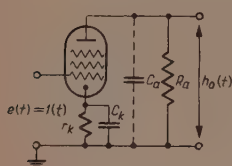
Zatem funkcja przenoszenia układu bez uwzględnienia reakcji anody jest

$$K(p) = S_z \cdot Z_a, \quad (4)$$

gdzie

$$Z_a = \frac{R_a}{1 + p C_a R_a}.$$

Rys. 1. Schemat wzmacniacza impulsowego ze sprzężeniem zwrotnym prądowym.



Podstawiając do (4) wielkości Z_a i S_z otrzymujemy

$$K_o(p) = \frac{1 + S r_k}{S R_a} K(p) = \frac{\frac{k \tau_k}{\tau_a^2} p + \frac{k}{\tau_a^2}}{\left(p + \frac{1}{\tau_a}\right) \left(p + \frac{k}{\tau_a}\right)}, \quad (5)$$

gdzie $k = (1 + Sr_k) \frac{\tau_a}{\tau_k}$, $\tau_a = R_a C_a$, $\tau_k = C_k r_k$. Funkcja przejściowa tego wzmacniacza wyraża się zatem jako

$$h_0(t) = 1 + A_1 e^{-\frac{t}{\tau_a}} + A_2 e^{-\frac{k}{\tau_a} t}, \quad (6)$$

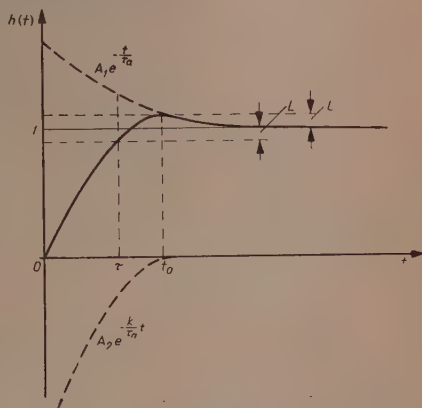
gdzie

$$A_1 = -\left(1 + \frac{Sr_k}{1-k}\right), \quad (7)$$

$$A_2 = \frac{Sr_k}{1-k} = -(A_1 - 1). \quad (8)$$

Wykres tej funkcji dla $k > 1$ przedstawiono na rys. 2.

Jak wynika z rys. 2, funkcja przejściowa $h_0(t)$ składa się z dwóch członów wykładniczych o różnych znakach, które należy dobrać w ten sposób, aby przybliżenie funkcji jednostkowej w danym przedziale czasowym $[\tau, \infty]$ było najlepsze. Spełnienie powyższego warunku jest opisane równaniami [5]:



Rys. 2. Funkcja przejściowa wzmacniacza przedstawionego na rys. 1.

$$h_0(\tau) - 1 = A_1 e^{-\frac{\tau}{\tau_a}} + A_2 e^{-\frac{k\tau}{\tau_a}} = -L,$$

$$h_0(t_0) - 1 = A_1 e^{-\frac{t_0}{\tau_a}} + A_2 e^{-\frac{k t_0}{\tau_a}} = L,$$

$$k=2, \quad A_1 + A_2 + 1 = 0,$$

czyli

$$A_1 e^{-\frac{\tau}{\tau_a}} - (1 + A_1) e^{-\frac{2\tau}{\tau_a}} = -L, \quad (9)$$

$$A_1 e^{-\frac{t_0}{\tau_a}} - (1 + A_1) e^{-\frac{2t_0}{\tau_a}} = L. \quad (10)$$

Punkt t_0 można określić z równania

$$h'_0(t) \Big|_{t=t_0} = -\frac{A_1}{\tau_a} e^{-\frac{t_0}{\tau_a}} + \frac{2}{\tau_a} (1 + A_1) e^{-\frac{2t_0}{\tau_a}} = 0,$$

$$h_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{K_0(p)}{p} e^{pt} dp.$$

skąd

$$e^{-\frac{t_0}{\tau_a}} = \frac{A_1}{2(1+A_1)} \quad (11)$$

Podstawiając (11) do równań (9), (10) oraz oznaczając $e^{-\frac{\tau}{\tau_a}} = a$, znajdujemy

$$A_1 = \frac{a^2 - L}{a - a^2}, \quad (12)$$

$$A^2 = \frac{a - L}{a^2 - a}, \quad (13)$$

$$\frac{(a^2 - L)^2}{(a - a^2)(a - L)} = 4L. \quad (14)$$

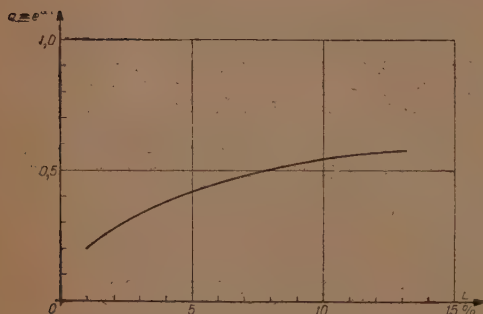
Wykres zależności $a = f(L)$ na podstawie równania (14) przedstawiono na rys. 3.

Porównując (12) i (13) z (7) i (8) otrzymamy następujące wzory

$$R_a = -\frac{\tau}{C_a \ln a}, \quad (15)$$

$$r_k = \frac{1}{S} \cdot \frac{a - L}{a - a^2}, \quad (16)$$

$$C_k = \frac{1 + S r_k}{2 r_k} \cdot R_a C_a, \quad (17)$$



Rys. 3. Wykres zależności $a = f(L)$.

Przykład. Obliczyć wzmacniacz (rys. 1) o danych: $S = 10 \text{ mA/V}$; $C_a = 10 \times 10^{-6} \mu\text{F}$; $\tau = 1 \mu\text{sec}$; $L = 5\%$. Dla $L = 5\%$ z rys. 3 otrzymujemy $a = 0,43$. Zatem $R_a \approx 120 \text{ k}\Omega$; $r_k = 152 \Omega$; $C_k \approx 10^{-2} \mu\text{F}$.

Z rozpatrzonego przykładu wynika, iż kryterium najlepszego przybliżenia jest wygodne z tego względu, że zniekształcenia L są związane bezpośrednio z czasem narastania τ , przy czym dla zadanego τ odchylenie L osiąga możliwie najmniejszą wartość.

3. PROJEKTOWANIE UKŁADÓW LINIOWYCH NA PODSTAWIE PRZYBLIŻENIA W METRYCE PRZESTRZENI L

W przypadku projektowania układów liniowych na podstawie przybliżenia w metryce przestrzeni L zniekształcenia sygnału określa wyrażenie

$$I^{(1)} = \int_0^{\infty} |\delta(t)| dt, \quad (18)$$

to jest powierzchnia ograniczona krzywą $\delta(t)$.

Kryterium powyższe jest szczególnie wygodne dla układów z pierwiastkami rzeczywistymi równania charakterystycznego, gdzie krzywa $\delta(t)$ jest stale dodatnia lub stale ujemna.

W powyższym przypadku

$$I^{(1)} = \int_0^{\infty} |\delta(t)| dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt. \quad (19)$$

Wykorzystując następującą własność przekształcenia Carsona

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{F(p)}{p}, \quad (20)$$

gdzie

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt;$$

równanie (19) można wyrazić następująco:

$$I^{(1)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{D(p)}{p}, \quad \text{gdzie} \quad D(p) = p \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt. \quad (21)$$

$D(p)$ jest to normowana funkcja błędu, będąca funkcją operatora p i parametrów układu $k_1, k_2 \dots k_n$. Jak wynika z (21) błąd $I^{(1)}$ jest funkcją parametrów układu $k_1, k_2 \dots k_n$.

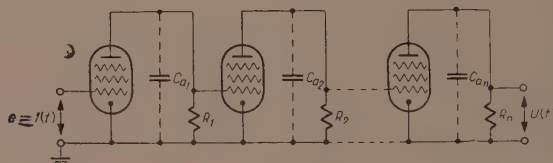
Minimum $I^{(1)}$ można wyznaczyć z warunków:

$$\frac{\partial I^{(1)}}{\partial k_r} = 0; \quad (r = 1, 2 \dots n). \quad (22)$$

Przykład. Znaleźć w metryce przestrzeni L optymalne wartości oporności obciążenia $R_1, R_2 \dots R_n$, n -członowego wzmacniacza, którego układ uproszczony przedstawiono na rys. 4 w założeniu, że:

1. pojemności szkodliwe $C_{a1}, C_{a2} \dots C_{an}$ i nachylenia $S_1 \dots S_n$ poszczególnych członów są jednakowe,

2. wzmacnienie układu dla stanu ustalonego: $\prod_{k=1}^n S_k R_k = S^n \prod_{k=1}^n R_k = a =$
 $= \text{const},$
 3. $e(t) = 1(t).$



Rys. 4. Schemat wzmacniacza oporowego n -członowego.

Normowana funkcja przenoszenia układu bez uwzględnienia reakcji anody oraz elementów sprzęgających wyraża się jako

$$K_0(p) = \frac{1}{S^n \prod_{k=1}^n R_k} K(p) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{p a_k + 1}, \quad (23)$$

gdzie $a_k = R_k C_{a_k}$.

Stosując wzór (21) otrzymujemy

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\prod_{k=1}^n \frac{1}{p a_k + 1}}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{p} \cdot \frac{\prod_{k=1}^n (p a_k + 1) - 1}{\prod_{k=1}^n (p a_k + 1)} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + \frac{a_n}{\prod_{v=1}^{n-1} a_v} \quad \text{gdzie } a_1 = \prod_{v=1}^n a_v \end{aligned} \quad (24)$$

Optymalne wartości a_k znajdujemy z warunków

$$\frac{\partial I^{(1)}}{\partial a_k} = 1 - \frac{a_1}{a_k \prod_{v=1}^{n-1} a_v} = 1 - \frac{a_n}{a_k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n-1). \quad (25)$$

Z równań (25) mamy

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n,$$

czyli

$$R_1 = R_2 = \dots = R_n. \quad (26)$$

Znajdując drugie pochodne $I^{(1)}$

$$\frac{\partial^2 I^{(1)}}{\partial a_k^2} = \frac{a_n}{a_k^2} = \frac{1}{a_k}, \quad (27)$$

widzimy, że pochodne te są zawsze dodatnie. Zatem w przypadku jednakowych oporności obciążenia zniekształcenia sygnału $I^{(1)}$ będą minimalne. W odniesieniu do n -członowego wzmacniacza rezonansowego, którego funkcja przenoszenia obwiedni (w założeniu dostrojenia wszystkich obwodów do częstotliwości nośnej) wyraża się wzorem analogicznym do (23), wniosek (26) sprowadza się do żądania, aby dobroci wszystkich obwodów były jednakowe.

W przypadku przybliżenia oszacowanego, z funkcją ważkości $c(t)$, otrzymujemy analogicznie

$$I_c^{(1)} = \int_0^{\infty} c(t) \delta(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{C(s)D(p-s)}{s(p-s)} ds, \quad (28)$$

gdzie

$$C(p) = p \int_0^{\infty} c(t) e^{-pt} dt.$$

4. PROJEKTOWANIE UKŁADÓW NA PODSTAWIE PRZYBLIŻENIA W METRYCE PRZESTRZENI L^2

Ze wzoru (3) wynika, że w przypadku projektowania układów na podstawie przybliżenia w metryce przestrzeni L^2 stopień zniekształceń określa się wzorem

$$I^{(2)} = \int_0^{\infty} \delta^2(t) dt. \quad (29)$$

Kryterium powyższe do oceny zniekształceń liniowych wprowadził A. Charkiewicz [2].

Kryterium to szczególnie nadaje się do układów z tłumieniem nie przewyższającym tłumienia krytycznego, gdzie krzywa stanu przejściowego ma przebieg oscylacyjny. Zastosowanie w przypadku powyższym przybliżenia w metryce przestrzeni L napotyka na trudności. Podobnie jak w rozdziale 3 zagadnienie sprowadza się zatem do wyznaczenia minimum funkcjonału (29) przy oczywistych warunkach granicznych $\delta(0) = 1, \delta(\infty) = 0$. Dla konkretnych układów wartość tego funkcjonału można wyrazić za pomocą parametrów $k_1, k_2 \dots k_n$ funkcji przenoszenia układu.

Istotnie, stosując wzór (20) do funkcji $\delta^2(t)$ mającej obraz ⁴

⁴ Obraz iloczynu dwóch funkcji $f_1(t) \cdot f_2(t) = \varphi(t)$ wyraża się wzorem

$$\Psi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F_1(p) \cdot F_2(s-p)}{(s-p)p} dp.$$

gdzie $F_1(p), F_2(p)$ — przekształcenie Carsona funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{D(p-s)D(s)}{(p-s)s} ds, \quad (30)$$

gdzie

$$D(p) = p \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt,$$

otrzymujemy

$$I^{(2)} = \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{D(p-s)D(s)}{(p-s)s} ds \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{D(-s) \cdot D(s)}{-s^2} ds,$$

czyli

$$I^{(2)} = \sum \operatorname{Re} z \left[\frac{D(-p)D(p)}{-p^2} \right] \quad (31)$$

We wzorze tym rezydua należy obliczać względem wszystkich biegunów funkcji $\frac{D(p)}{p}$.

Jeśli funkcja $\frac{D(p)}{p}$ wyraża się ułamkiem wymiernym, czyli

$$\frac{D(p)}{p} = \frac{M(p)}{N(p)},$$

gdzie $M(p)$ i $N(p)$ są wielomianami stopni m i n , to wartość (31) można wyrazić w sposób wymierny przez współczynnik a_r i b_r wielomianów

$$N(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \quad (32)$$

$$R(p) = M(p) \cdot M(-p) = b_0 p^{2n-2} + b_1 p^{2n-4} + \dots + b_n. \quad (33)$$

Wykorzystując np. rezultaty obliczeń Philipsa i Mac Lane'a [8] możemy napisać:

dla $n=2$

$$I^{(2)} = \frac{a_0 b_1 - a_2 b_0}{2a_0 a_1 a_2}, \quad (34)$$

dla $n=3$

$$I^{(2)} = \frac{a_0 a_1 b_2 - a_0 a_3 b_1 + a_2 a_3 b_0}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} \quad (35)$$

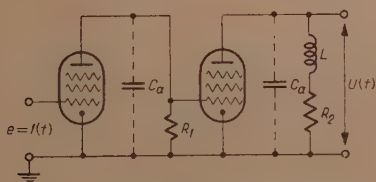
i tak dalej.

Ponieważ współczynniki a_r, b_r wyrażają się przez parametry układu k_1, k_2, \dots, k_n , minimum (31) można znaleźć z warunków

$$\frac{\partial I^{(2)}}{\partial k_r} = 0, \quad (r = 1 \dots n). \quad (36)$$

W celu zobrazowania możliwości praktycznego stosowania powyższych wzorów rozpatrzmy kilka prostych przypadków.

Przypadek 1. Znajdźmy optymalne parametry wzmacniacza przedstawionego na rys. 5, zakładając, że zniekształcenia (29) przy $e(t)=1(t)$



Rys. 5. Schemat dwuczłonowego wzmacniacza z korekcją.

powinny być minimalne. Normowana funkcja przenoszenia tego wzmacniacza wyraża się przez

$$K_0(p_1) = \frac{1}{S_1 S_2 R_1 R_2} \quad K(p_1) = \frac{1}{p_1 \alpha + 1} \cdot \frac{p_1 k + 1}{p_1^2 k + p_1 + 1}, \quad (37)$$

gdzie

$$k = \frac{L}{R_2^2 C}, \quad \alpha = \frac{R_1}{R_2}, \quad p_1 = p R_2 C \alpha.$$

Stosując wzory (32), (33) znajdujemy

$$D(p_1) = 1 - K_0(p_1) = \frac{p_1^3 a k + (a + k) p_1^2 + (1 + a - k) p_1}{p_1^3 a k + (a + k) p_1^2 + (1 + a) p_1 + 1},$$

$$N(p_1) = p_1^3 a k + (a + k) p_1^2 + (1 + a) p_1 + 1,$$

$$R(p_1) = p_1^4 a^2 k^2 + [2 a k (1 + a - k) - (a + k)^2] p_1^2 + (1 + a - k)^2,$$

zatem

$$a_0 = a k, \quad a_1 = a + k, \quad a_2 = 1 + a, \quad a_3 = 1,$$

$$b_0 = a^2 k^2, \quad b_1 = a^2 (2k - 1) - k^2 (2a + 1), \quad b_2 = (1 + a - k)^2.$$

Podstawiając powyższe wartości do wzoru (35) otrzymujemy

$$I^{(2)} = \frac{k^3 + (a - 1) k^2 + (a - 2a^2 + 1) k + a^3 + 3a^2 + a}{2(a_2 + a + k)}. \quad (38)$$

⁵ Funkcją przenoszenia $K(p)$ nazywamy operatorową reakcję układu na jednostkowy sygnał wejściowy.

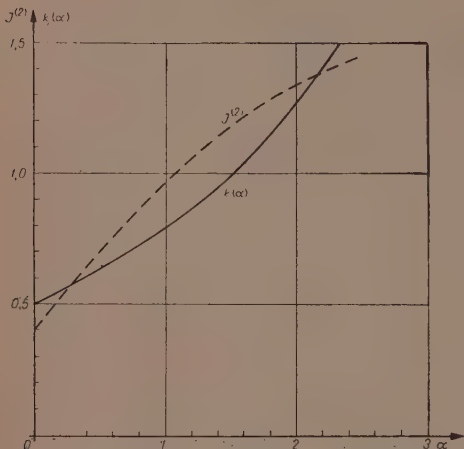
Optymalną wartość współczynnika k dla danego a otrzymamy z warunku

$$\frac{\partial I^{(2)}}{\partial k} = 0,$$

który sprowadza się do równania

$$2k^3 + (3a^2 + 4a - 1)k^2 + 2a(a^2 - 1)k - a^2(2a^2 + 2a + 1) = 0. \quad (39)$$

Zależność $k=f(a)$ znaną z równania (39) przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Wykres zależności $k=f(a)$ oraz $I^{(2)}=f_1(a)$.

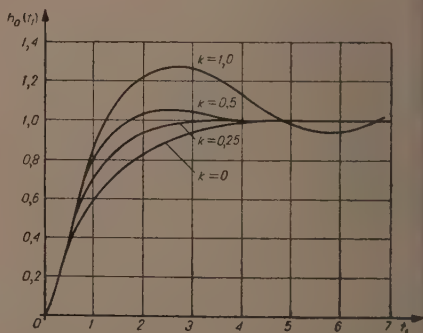
Podstawiając wartości k i a z rys. 6 do (38) otrzymujemy krzywą $I^{(2)}(a)$ przedstawioną na rys. 6. Jak wynika z tego rysunku, w przypadku układu dwuczłonowego optymalny współczynnik korekcji k ma znacznie większą wartość niż w przypadku układu jednostopniowego ($a=0$). Przy czym wartość k powinna być tym większa, im większy jest stosunek oporności obciążenia członów $\frac{R_1}{R_2}$. Wzrost tego stosunku zapewnia wprowadzić większą wartość wzmocnienia

$$K_0 = S_1 S_2 R_1 R_2 = S_1 S_2 a R_2^2,$$

lecz powoduje znaczny wzrost błędu $I^{(2)}(a, k)$. Na rys. 7 przedstawiono funkcję przejściową wzmacniacza dla $a=0$ i dla różnych wartości k .

Rozpatrzony przypadek daje również odpowiedź na następujące zagadnienie.

Przypuśćmy, że na wejście jednostopniowego wzmacniacza wprowadzono sygnał zniekształcony w poprzednich członach urządzenia. Sygnał taki można aproksymować funkcją $e(t) = 1 - e^{-\frac{t}{a}}$. Zatem dla odтворzenia jednostkowego sygnału wejściowego możemy wybrać optymalny współczynnik korekcji urządzenia z wykresu rys. 6.



Rys. 7. Wykres funkcji przejściowej wzmacniacza z korekcją.

Przypadek 2. Znajdźmy teraz optymalną wartość współczynnika korekcji k jednoczłonowego wzmacniacza w założeniu, że należy odtworzyć na wyjściu sygnał $e(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$, wyrażony operatorem Carsona $\frac{1}{p_1\tau + 1}$,

gdzie

$$\tau = \frac{T}{R_2 C_a}, \quad p_1 = p R_2 C_a.$$

stosując wzory (32) i (33) otrzymujemy

$$D(p_1) = \frac{1}{p_1\tau + 1} - \frac{1}{p_1\tau + 1} \cdot \frac{p_1 k + 1}{p_1^2 k + p_1 + 1} = \frac{p_1^2 k + (1 - k)p_1}{p_1^2 \tau k + (\tau + k)p_1^2 + (1 + \tau)p_1 + 1},$$

$$R(p_1) = -k^2 p_1^2 + (1 - k)^2.$$

Zatem

$$a_0 = \tau k, \quad a_1 = \tau + k, \quad a_2 = 1 + \tau, \quad a_3 = 1,$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = -k^2, \quad b_2 = (1 - k)^2.$$

Podstawiając powyższe wielkości do wzoru (35) otrzymujemy

$$I^{(2)} = \frac{(\tau + k)(1 - k)^2 + k^2}{2(\tau^2 + \tau + k)}. \quad (40)$$

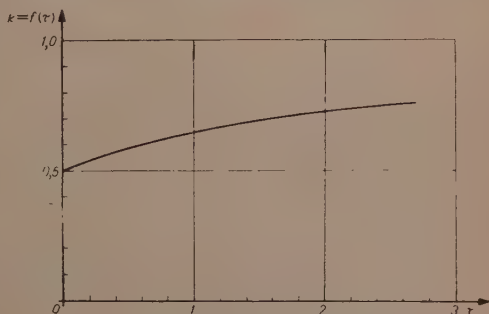
Przyrównując pochodną powyższego wyrażenia względem k do zera otrzymujemy równanie

$$2k^3 + (3\tau^2 + 4\tau - 1)k^2 + (2\tau^3 - 2\tau)k - 2\tau^3 - \tau^2 = 0. \quad (41)$$

Zależność $k = f(\tau)$ określoną z równania (41) przedstawiono na rys. 8.

Jak wynika z rys. 8 przy wzmacniaczu sygnałów wzrastających wykładniczo (np. podstawy czasu), optymalny współczynnik korekcji k powinien mieć nieznacznie większą wartość w porównaniu ze wzmacniaczem sygnałów jednostkowych.

Przypadek 3. W przypadku sygnałów wejściowych $e(t) = e^{-\beta t}$, optymalną wartość współczynnika k znajdujemy podobnie jak w przypadkach powyższych, to jest



Rys. 8. Wykres współczynnika $k = f(\tau)$.

$$D(p_1) = \frac{1}{p_1 + \beta} \cdot \frac{1}{p_1 + \beta} \cdot \frac{p_1 k + 1}{p_1^2 k + p_1 + 1} = \frac{p_1^3 k + (1-k)p_1^2}{p_1^3 k + (1+\beta k)p_1^2 + (1+\beta)p_1 + \beta},$$

$$R(p_1) = p_1^4 k^2 - (1-k)^2 p_1^2.$$

Zatem

$$a_0 = k, \quad a_1 = 1 + \beta k, \quad a_2 = 1 + \beta, \quad a_3 = \beta,$$

$$b_0 = k^2, \quad b_1 = -(1-k)^2, \quad b_2 = 0,$$

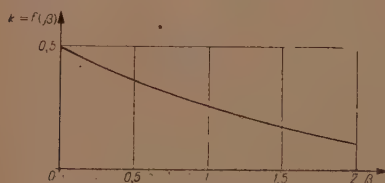
Podstawiając powyższe wielkości do (35) otrzymujemy

$$I^{(2)} = \frac{k^2 + (\beta - 1)k + 1}{2(1 + \beta + \beta^2 k)}. \quad (42)$$

Przyrównując pochodną względem k -tego wyrażenia do zera otrzymujemy

$$\beta^2 k^2 + 2(1 + \beta)k - 1 = 0. \quad (43)$$

Zależność $k = f(\beta)$ podano na rys. 9.



Rys. 9. Wykres współczynnika $k = f(\beta)$

W przypadku sygnałów bardzo krótkich (np. przy $\beta \rightarrow \infty$) sygnał na wyjściu układu wzmacniającego

$$u(t) = \int_0^t h'(t - \xi) e(\xi) d\xi; \quad h(0) = 0 \quad (44)$$

określa się jedynie parametrami tego wzmacniacza. Można się o tym przekonać, uwzględniając fakt, iż dla momentów czasu większych od t_0 — a więc gdy $e(t)$ praktycznie równa się zero, a $h'(t - \xi) \approx h'(t)$ — wzór (44) przyjmuje postać

$$u(t) \approx h'(t) \int_0^{t_0} e(\xi) d\xi. \quad (45)$$

Pierwszy czynnik w tym wzorze zależy jedynie od parametrów układu, drugi zaś — jedynie od pola ograniczonego sygnałem i osią czasu bez względu na kształt tego sygnału. W celu odtworzenia krótkotrwałego sygnału wejściowego należy zatem projektować układ wzmacniający w taki sposób, aby pochodna jego funkcji przejściowej miała kształt sygnału wzmacnianego. W przypadku sygnału typu $e^{-\beta t}$ można to uczynić stosując zwykły wzmacniacz oporowy ze stałą czasu $R_a C_a = \frac{1}{\beta}$.

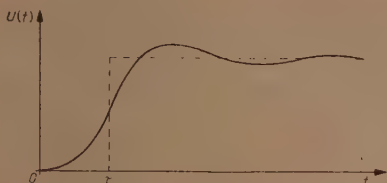
Przypadek 4. Dotychczas zakładaliśmy, że zarówno czas opóźnienia sygnału, jak i jego zniekształcenia są czynnikami jednakowo niepożąda-

nymi i dlatego przyjęliśmy kryterium minimalnego błędu kwadratowego w postaci (29).

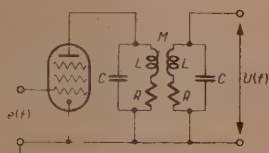
Jednakże w wielu urządzeniach czas opóźnienia sygnału nie powoduje zniekształceń (np. w przypadku wzmacniaczy sygnałów telewizyjnych, telegraficznych itp.). W urządzeniach takiego typu chodzi głównie o odtworzenie kształtu sygnału bez względu na niewielki stosunkowo czas opóźnienia τ (rys. 10).

W takim przypadku można zastosować kryterium zniekształceń wyrażone wzorem

$$I_{\tau}^{(2)} = \int_0^{\infty} [1(t-\tau) - u(t)]^2 dt. \quad (46)$$



Rys. 10. Odtworzenie sygnału jednostkowego opóźnionego o odcinek czasu τ .



Rys. 11. Schemat dwu-obwodowego wzmacniacza rezonansowego.

Stosując do powyższego wyrażenia przekształcenia (30), (31) otrzymujemy

$$I_{\tau}^{(2)} = \sum \operatorname{Re} z \left\{ \frac{[e^{-p\tau} - K(p)][e^{p\tau} - K(-p)]}{-p^2} \right\}, \quad (47)$$

przy czym rezydua należy obliczać względem wszystkich biegunów funkcji $\frac{e^{-p\tau} - K(p)}{p}$.

Jako przykład wyznaczmy optymalny współczynnik sprzężenia ν w dwuobwodowym wzmacniaczu rezonansowym (rys. 11), który zapewni minimalne zniekształcenia obwiedni sygnału jednostkowego $1(t-\tau)$.

Normowana funkcja przenoszenia wzmacniacza takiego typu, wyznaczona metodą Jewtjanowa [4], wyraża się jako:

$$\frac{(1+\nu^2)}{SQ^2 M \omega_0} K(p_1) = K_0(p_1) = \frac{1+\nu^2}{p_1^2 + 2p_1 + 1 + \nu^2}, \quad (48)$$

gdzie

$$p_1 = \frac{R}{L} p, \quad \nu = -\frac{M}{R_1' LC}, \quad Q = \frac{1}{\omega_0 C \nu}.$$

Podstawiając powyższe wielkości do (47), otrzymujemy

$$I_{\tau}^{(2)} = \sum \operatorname{Re} z \left\{ \frac{1}{-p_1^2} \left[e^{-p_1 \tau} - \frac{1+\nu^2}{p_1^2 + 2p_1 + 1 + \nu^2} \right] \left[e^{p_1 \tau} - \frac{1+\nu^2}{p_1^2 - 2p_1 + 1 + \nu^2} \right] \right\}. \quad (49)$$

Obliczając rezydua (49) względem biegunów: $p_1' = 0$, $p_1'' = -1 + i\nu$, $p_1''' = -1 - i\nu$ mamy

$$I_{\tau}^{(2)} = \frac{1}{4} + \tau - \frac{3}{1+\nu^2} + \frac{2e^{-\tau}}{\nu(1+\nu^2)} [(1-\nu^2) \sin \nu \tau + 2\nu \cos \nu \tau]. \quad (50)$$

Optymalną wartość ν obliczamy z równania $\frac{\partial I_{\tau}^{(2)}}{\partial \nu} = 0$, które przyjmuje postać

$$3\nu e^{\tau} - \left[\nu^2(2\tau - 1) + \frac{1}{\nu^2} + 2\tau + 4 \right] \sin \nu \tau - \left[\left(\nu^2 - \frac{1}{\nu} \right) \tau + 4\nu \right] \cos \nu \tau = 0. \quad (51)$$

Z równania tego można obliczyć dla danego τ optymalną wartość ν . Na przykład dla $\tau=1$, będzie $\nu=1,16$.

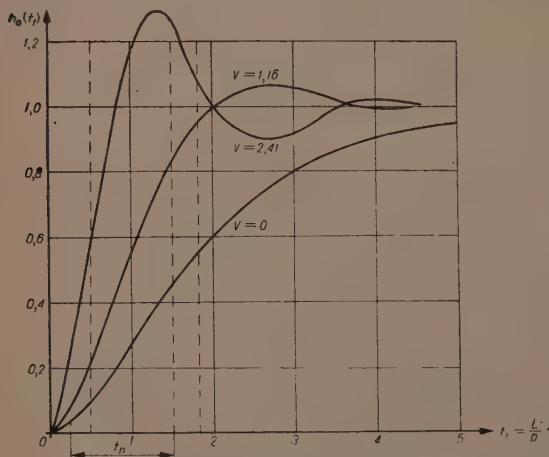
Wykres obwiedni sygnału wyjściowego

$$h_0(t_1) = 1 - e^{-t_1} \left(\cos \nu t_1 + \frac{1}{\nu} \sin \nu t_1 \right), \quad (52)$$

gdzie

$$t_1 = \frac{L}{R} t,$$

przedstawiony na rys. 12 dla $\nu=1,16$, aproksymuje z minimalnym błędem kwadratowym funkcję $1(t-1)$.



Rys. 12. Wykres obwiedni sygnału wyjściowego we wzmacniaczu rezonansowym.

„Wyskok“ obwiedni ponad poziom jednostkowy jest $L \approx 5\%$, a czas narastania (odpowiadający rzędnym obwiedni 0,1 i 0,9) $t_n = 1,5 \frac{L}{R}$.

Na rysunku tym przedstawiono również obwiednie sygnałów odpowiadające $\nu=0$, $\tau=1,79$ oraz $\nu=2,41$, $\tau \approx 0,5$. Zatem im mniejszy jest czas opóźnie-

nia τ , tym większy będzie wyskok obwiedni L oraz mniejszy czas narastania t_n .

Dla $\tau=0$ równanie (51) posiada jedno tylko rozwiązanie $\nu=0$, co odpowiada maksymalnemu błędowi $I_\tau^{(2)}$. Jeśli ν wzrasta, błąd ten maleje nie osiągając jednak wartości minimalnej. Wynika stąd wniosek, że kryterium typu (29) dla rozpatrywanego przypadku nie daje optymalnego rozwiązania.

Optymalną wartość τ można wyznaczyć z warunku $\frac{\partial I_\tau^{(2)}}{\partial \tau} = 0$ lub przyjąć, że τ pokrywa się z czasem opóźnienia grupowego sygnału wyjściowego t_0 .

Czas ten wyraża się dla rozpatrywanego układu wzorem

$$t_0 = \frac{2}{1 + \nu^2}.$$

Przypadek 5. W rozpatrzonych przykładach określaliśmy optymalne parametry układów dla najbardziej typowych i często spotykanych sygnałów wejściowych. Jednakże w wielu przypadkach sygnał wejściowy nie jest jednoznacznie określoną funkcją czasu lecz funkcją przypadkową, to jest funkcją, której przebieg nie może być z góry przewidziany z całą pewnością. Funkcje stacjonarne takiego typu mogą być określone za pomocą współczynnika korelacji lub gęstości widmowej, które to wielkości mogą być wyznaczone teoretycznie lub doświadczalnie (np. za pomocą korelatorów).

Założmy zatem, że na wejściu układu liniowego działa stacjonarny sygnał przypadkowy

$$e(t) = m(t) + n(t) \quad (53)$$

składający się z pożytecznego sygnału $m(t)$ i szumów $n(t)$. Znajdźmy funkcję przenoszenia układu w założeniu, że układ odtwarza na wyjściu sygnał wejściowy $m(t)$ z minimalnym błędem średnio kwadratowym

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [m(t) - u(t)]^2 dt. \quad (54)$$

W pracy N. Wienera [11] pokazano, że powyższe zagadnienie prowadzi do równania całkowego, którego rozwiązanie wyraża się jako [10]:

$$K(i\omega) = \frac{1}{2\pi\psi(i\omega)} \int_0^\infty e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_m(\omega) + S_{mn}(\omega)}{\psi^*(i\omega)} e^{i\omega t} d\omega, \quad (55)$$

gdzie

$$|\psi(i\omega)|^2 = S_m(\omega) + S_n(\omega) + S_{nm}(\omega) + S_{mn}(\omega),$$

⁶ Gdzie $u(t)$ jest napięciem na wyjściu układu.

przy czym $S_m(\omega)$, $S_n(\omega)$, $S_{nm}(\omega)$, $S_{mn}(\omega)$ są gęstościami widmowymi lub tak zwanymi widmami energetycznymi.

Wielkości powyższe opisują wzory:

$$S_m(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |M_T(i\omega)|^2,$$

$$S_n(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |N_T(i\omega)|^2,$$

$$S_{mn}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} M_T^*(i\omega) \cdot N_T(i\omega),^7$$

gdzie

$$M_T(i\omega) = \int_{-T}^T m_T(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$N_T(i\omega) = \int_{-T}^T n_T(t) e^{-i\omega t} dt,$$

przy czym

$$m_T(t) = m(t) \quad \text{dla} \quad -T \leq t \leq T,$$

$$m_T(t) = 0 \quad \text{dla pozostałych wartości czasu.}$$

Przykład. Załóżmy, że sygnał telegraficzny o amplitudzie A i średniej liczbie zmian znaku na sekundę ν działa razem z „białym” szumem na wejście układu wzmacniającego.

Gęstość widmowa sygnału telegraficznego według obliczeń S.O. Rice'a jest [10]

$$S_m(\omega) = \frac{2A^2\nu}{\omega^2 + 4\nu^2}, \quad (56)$$

natomiast gęstość widmowa białego szumu

$$S_n(\omega) = a^2. \quad (57)$$

Gęstości: $S_{mn} = S_{nm} = 0$.

Zatem

$$|\psi(\omega)|^2 = \frac{2A^2\nu}{\omega^2 + 4\nu^2} + a^2 = \frac{(\sqrt{2A^2\nu + 4a^2\nu^2} + ia\omega)(\sqrt{2A^2\nu + 4a^2\nu^2} - ia\omega)}{(i\omega + 2\nu)(2\nu - i\omega)}$$

Stąd

$$\psi(i\omega) = \frac{\sqrt{2\nu(A^2 + 2a^2\nu)} + ia\omega}{2\nu + i\omega}.$$

⁷ Gwiazdką * oznacza się wielkości zespolone sprzężone.

Zatem

$$\frac{S_m(\omega)}{\psi^*(i\omega)} = \frac{2A^2\nu}{(2\nu + i\omega)[\sqrt{2\nu(A^2 + 2\nu a^2)} - ia\omega]} =$$

$$= \frac{2A^2\nu}{2a\nu + \sqrt{2\nu(A^2 + 2\nu a^2)}} \left(\frac{1}{2\nu + i\omega} + \frac{a}{\sqrt{2\nu(A^2 + 2\nu a^2)} - ia\omega} \right).$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (55) otrzymujemy

$$K(i\omega) = \frac{2A^2\nu}{[2a\nu + \sqrt{2\nu(A^2 + 2\nu a^2)}][\sqrt{2\nu(A^2 + 2\nu a^2)} + ia\omega]}.$$

Oznaczając stosunek sygnału do szumu przez $\mu = \frac{A}{a}$ oraz $i\omega = p$ otrzymamy dla normowanej funkcji przenoszenia wyrażenie

$$K_0(p) = kK(p) = \frac{1}{1 + pT}, \quad (58)$$

gdzie

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\nu(2\nu + \mu^2)}}, \quad k = \frac{\sqrt{2\nu(2\nu + \mu^2)}[2\nu + \sqrt{2\nu(2\nu + \mu^2)}]}{2A^2\nu}.$$

Jak widzimy, dla odtworzenia sygnału wejściowego należy zbudować układ, którego funkcja przenoszenia wyraża się wzorem (58). Funkcję takiego typu można na przykład realizować za pomocą jednoczłonowego układu wzmacniającego o stałej czasu $R_a C_a = T$.

W przypadku sygnałów modulowanych, funkcję przenoszenia obwiedni typu (58) można zrealizować za pomocą jednoobwodowego wzmacniacza rezonansowego. Jednakże zwykle układy takiego typu posiadają zbyt małe wzmocnienie, zastosowanie zaś układów wieloczłonowych prowadzi do funkcji przenoszenia

$$K_b^1(p) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{pT_k + 1} \cdot \prod_{\nu=1}^m \frac{pk_\nu + 1}{p^2 k_\nu + p + 1}$$

lub też do funkcji podobnego typu.

W powyższym przypadku optymalną wartość $K_0(p)$ można otrzymać żądając, aby błąd

$$I^{(2)} = \sum \operatorname{Re} z \left\{ \frac{[K_0(p) - K_0^1(p)][K_0(-p) - K_0^1(-p)]}{-p^2} \right\} \quad (59)$$

był minimalny.

Przypadek 6. Jako ostatni przypadek rozpatrzmy schemat tak zwanej programowej regulacji automatycznej (rys. 13), w którym polepszenie jakości regulacji uzyskuje się drogą zastosowania różniczkowego układu pomiarowego.

Założmy, że funkcje przenoszenia wyrażają się następująco:

1. dla obiektu regulowania

$$K_0 = \frac{1}{1 + pT_0} \quad (60)$$

(co odpowiada np. układowi regulacji ciśnienia w zbiorniku),

2. dla układu pomiarowego

$$K(p) = \frac{1}{r} + pT \quad (61)$$

(co odpowiada np. tachometrycznemu układowi pomiarowemu),

3. dla układu mocy

$$K_s(p) = \frac{1}{pT_s} \quad (62)$$

(co odpowiada np. serwowotorowi hydraulicznemu).

Zależność procesu regulacji $Y(p)$ od zadania regulacji $X(p)$ wyraża się zatem jako

$$Y(p) = X(p) \frac{K_s(p) \cdot K_0(p)}{1 + K_s(p) \cdot K_0(p) K(p)}$$

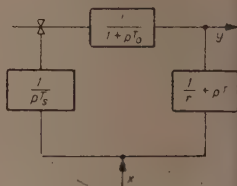
Podstawiając wielkości (60), (61), (62) oraz oznaczając $rT_s = T'_s$, $rT = T'$ dla jednostkowej zmiany poziomu regulacji $X(p) = 1$ otrzymamy

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{T'_0 T'_s}}{p^2 + \frac{T'_s + T'}{T'_0 T'_0} p + \frac{1}{T'_0 T'_s}} \quad (63)$$

W celu znalezienia powierzchni zawartej między funkcją jednostkową i krzywą procesu przejściowego stosujemy wzory (32) oraz (33) i znajdujemy

$$D(p) = \frac{p^2 + \frac{T'_s + T'}{T'_0 T'_s} p}{p^2 + \frac{T'_s + T'}{T'_0 T'_s} p + \frac{1}{T'_0 T'_s}},$$

$$R(p) = -p^2 + \left(\frac{T'_s + T'}{T'_0 T'_s} \right)^2$$



Rys. 13. Schemat układu programowej regulacji automatycznej.

Zatem

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{T'_s + T'}{T'_s T'_0}, \quad a_2 = \frac{1}{T'_s T'_0},$$

$$b_0 = -1, \quad b_1 = \left(\frac{T'_0 + T'}{T'_s T'_0} \right)^2.$$

Podstawiając powyższe wielkości do (34) otrzymujemy

$$I^{(2)} = \frac{(T'_s + T')^2 + T'_s T'_0}{2(T'_s + T')}. \quad (64)$$

Przyrównując pochodną powyższego wyrażenia względem T' do zera otrzymamy optymalną wartość

$$T' = \frac{T'_0 - 2T'_s}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{T'_0 + 2T'_s}{6} \right)^2 + T'^2_s}. \quad (65)$$

Należy zaznaczyć, że błąd (64) wyznaczony z warunku (65) ma mniejszą wartość niż w przypadku warunku aperiodyczności procesu

$$\left(\frac{T'_s + T'}{T'_s T'_0} \right)^2 = 4 \frac{1}{T'_0 T'_s},$$

który jest zalecany przez niektórych autorów, na przykład [7].

5. ZAKOŃCZENIE

Rozpatrzone metody projektowania układów liniowych pozwalają na znalezienie optymalnych parametrów tych układów z punktu widzenia przyjętego kryterium zniekształceń.

Porównując ze sobą wielkości charakteryzujące zniekształcenia układów (np. maksymalne odchylenie w przybliżeniu Czebyszewa lub powierzchnie błędów w przypadku przybliżenia w metryce przestrzeni L i L^2) można znaleźć układy o najmniejszych zniekształceniach. Tym samym sposobem można określić najbardziej wygodne układy korekcji zniekształceń (np. układy korekcji zniekształceń w videowzmacniaczach itp.).

Następnie porównując funkcje przenoszenia tych układów można określić optymalną strukturę funkcji przenoszenia z punktu widzenia określonego kryterium. Wreszcie wykorzystując metody syntezy można urzeczywistnić układ optymalny.

WYKAZ LITERATURY

1. Achiezer N. I. — Lekcji po teorii aproksymacji. OGIZ 1947.
2. Charkiewicz A. A. — O primienienii kriterija kwadraticznoj progreszności. *Ž. T. F.* nr 5, 1937.
3. Dustan G., Lathrop N. — The synthesis of „optimum“ transfer response, Criteria and standard. Transactions of A. I. E. E. part II, Nov. 1953.
4. Jewtjanow S. J. — Pierechodnyje procesy w prijomno usilitielnych schiemach. *GIL WSR* 1948.
5. Kulikowski R. — Obliczanie liniowych układów impulsowych. *Arch. Elektrot.* nr 2, 1954.
6. Obradovic I. — Die Abweichungsfläche bei Schnellregelvorgängen. *Archiv für Elektrot.* t. 36, 1942, s. 322.
7. Oldenbourg P., Sartorius G. — Dinamika awtomaticzeskogo regulirowanija. *GEI* 1949 (przekł. z niem.).
8. Philips R. S., James H. M., Nichols N. B. — Theory of servomechanism. *MIT*, t. 25, 1947.
9. Rizkin A. A. — Osnovy teorii usilitielnych schiem. *Sow. Rad.* 1951.
10. Sołodownikow W. W. — Wwiedienije w staticzeskiju dinamiku sistem awtomaticzeskogo uprawlenija. *GITL* 1952.
11. Wiener N. — Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. *John Wiley* 1949.
12. Zadeh L. A. — A general theory of linear signal transmission systems. *Journal of Franklin Institution* nr 3, 1952.

Р. КУЛИКОВСКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЗАДАНЫМ ВРЕМЕННЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ.

Резюме

Оптимальные параметры системы определяется на основе наилучшего приближения заданных временных характеристик в метрике определённого функционального пространства. Метрику этого пространства выбирается на основе принятого критерия искажений.

В качестве первого примера производится расчёт импульсного усилителя с обратной связью по току, представленного на рис. 1, на основе приближения временных характеристик в метрике пространства C . Выходное напряжение $h_0(t)$ (при единичной функции $1(t)$ на входе усилителя) выражается формулой (6) условия наилучшего приближения требуют чтобы отклонения переходной функции $h_0(t)$ от входного напряжения в заданном промежутке $|\tau, \infty|$, где τ — время нарастания импульса, было минимальное — возможное, т. е., чтобы

$$h_0(\tau) - 1 = -L,$$

$$h_0(t_0) - 1 = L,$$

где t_0 можно определить на основе уравнения

$$h_0(t) \big|_{t=t_0} = 0.$$

Решая эти уравнения получаем формулы (15), (16), (17), которые могут быть использованы для расчёта усилителя по заданным времени нарастания τ и выбросе L .

В качестве второго примера рассматривается определение оптимальных параметров n — каскадного усилителя на сопротивлениях (рис. 4) на основе приближе-

ния единичного входного сигнала в метрике пространства L . В этом случае находится минимум площади $I^{(1)}$ ограниченной кривой $\delta(t)=1(t)-h_0(t)$ путём решения уравнений

$$\frac{\partial I^{(1)}}{\partial k_v} = 0,$$

где k_v неизвестные параметры системы.

Затем рассматривается расчёт импульсных систем на основе приближения в метрике пространства L^2 . Оптимальные параметры системы находятся из уравнений:

$$\frac{\partial I^{(2)}}{\partial k_v} = 0,$$

где

$$I^{(2)} = \int_0^{\infty} \delta^2(t) dt = \sum \operatorname{Re} z \left\{ \frac{D(p) \cdot D(-p)}{-p^2} \right\},$$

$$D(p) = p \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt.$$

В качестве первого примера определяются параметры 2-каскадного импульсного усилителя, представленного на рис. 5. Затем находятся параметры усилителя

с коррекцией, на вход которого подается напряжение $e(t)=1-e^{-\frac{t}{\tau}}$ или $e(t)=e^{-\beta t}$. Результаты анализа приведены на рис. 6, 8, 9.

В качестве следующего примера рассматривается резонансный усилитель, представленный на рис. 11.

Оптимальный коэффициент связи $\nu = \frac{M}{R\sqrt{LC}}$ между контурами усилителя определяется путём обращения в минимум квадратических искажений [между огибающей выходного напряжения и входного импульса $1(t-\tau)$]

Рассматривается также проектирование усилителя на вход которого поступает случайный сигнал с заданной функцией спектральной плотности и шума. Метод основывается на критерии Н. Винера [11]

В качестве последнего примера рассматривается система программного регулирования (рис. 13) с тахометрическим измерительным устройством.

Рассмотренные методы проектирования разрешают определить оптимальные режимы работы различных устройств с точки зрения принятого критерия искажений.

R. KULIKOWSKI

DETERMINATION OF THE OPTIMUM LINEAR NETWORK PARAMETERS BASED ON THE TIME CHARACTERISTICS

Summary

The optimum network parameters are determined on the base of the best approximation of the given time characteristics in the metric of the defined space function. This space metric is chosen on the base of the given deformation criterion.

As the first example the design of the impulse amplifier with a current feed-back coupling is considered (Fig. 1) on the base of the time characteristic approximation in the space metric C . The output voltage $h_0(t)$ (at the unit input voltage $1(t)$ is

expressed by equation (6). The conditions of the best approximation require the deviation $h_0(t)$ from $1(t)$ to be a minimum between the given limits $[\tau, \infty]$ (where τ is the time of the impulse increase) so that

$$h_0(\tau) - 1 = -L,$$

$$h_0(t_0) - 1 = L$$

t_0 may be determined from condition

$$h'_0(t) \Big|_{t=t_0} = 0.$$

Solving the above equations we get the formulae (15), (16), (17), which may be used in designing an amplifier having the values of τ and L .

As the second example the determination of the optimum parameters of an n -stage resistance amplifier (Fig. 4) is considered on the ground of the approximation of the unit impulse signal in the space metric L . In this case the minimum of the area $I^{(1)}$, limited by the curve $\delta(t) = 1(t) - h_0(t)$ may be found by solving the equation

$$\frac{\partial I^{(1)}}{\partial k_p} = 0,$$

where $k_p \rightarrow$ the required circuit parameters.

Further the circuit design is considered on the base of the approximation in the space L^2 metric. The optimum parameters are found from the equation $\frac{\partial I^{(2)}}{\partial k_p} = 0$ where

$$I^{(2)} = \int_0^\infty \delta^2(t) dt = \sum \text{Res} \left\{ \frac{D(p) \cdot D(-p)}{-p^2} \right\},$$

$$D(p) = p \int_0^\infty \delta(t) e^{-pt} dt.$$

As an example the parameters of a two stage pulse amplifier are found (Fig. 5). Another example consists in finding the amplifier parameters with a correction. At its input are introduced the signals $e(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$ or $e(t) = e^{-\beta t}$. The results of the analysis are shown on the Fig. 6, 8 and 9.

As a further example a resonance amplifier is considered (Fig. 11). The optimum coupling coefficient $\nu = \frac{M}{R\sqrt{LC}}$ between the circuits is determined by reducing to minimum the rectangular distortions (between the output and input signal envelopes $1(t - \tau)$).

The next subject is the design of an amplifier at the input of which are introduced an stochastic signal of a given spectrum density function and noise. In this case the method is based on N. Wiener's criterion [11].

As the last example the author discusses an automatic program regulation with a tachometric measuring circuit.

The analysed design methods allow to formulate the optimum working conditions for various networks from the point of view of the accepted deformation criterion.

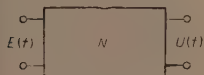
Optymalne charakterystyki częstotliwościowe liniowych układów dynamicznych

Rękopis dostarczono 6. 10. 1954.

Wyznaczono optymalne charakterystyki częstotliwościowe liniowych układów dynamicznych, odpowiadające minimalnym zniekształceniom jednostkowego sygnału impulsowego, przekazywanego przez układ w założeniu, że powierzchnia ograniczona kwadratem modułu tych charakterystyk posiada wielkość skończoną. Jako kryterium zniekształceń przyjęto tak zwany błąd kwadratowy. Wyniki otrzymane na drodze teoretycznej mogą służyć do projektowania konkretnych układów, na przykład układów przenoszenia i korekcji impulsów w technice impulsowej, układów automatycznej regulacji itp.

1. WSTĘP

Rozpatrzmy układ dynamiczny, przedstawiony na rys. 1, którego odpowiedź na sygnał wejściowy $E(t)$ wynosi $U(t)$. Układ ten będzie układem liniowym, jeśli dla



$$E(t) = c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t) + \dots + c_n e_n(t) \quad (1)$$

reakcja układu $U(t)$ wyrazi się przez

$$U(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t), \quad (2)$$

Rys. 1. Schemat układu liniowego.

gdzie $u_1(t), u_2(t) \dots u_n(t)$ — są reakcjami układu na sygnały $e_1(t), e_2(t) \dots e_n(t)$.

Metody określenia reakcji $U(t)$ układu liniowego na sygnał wejściowy $E(t)$ polegają na:

1. rozłożeniu sygnału $E(t)$ na sumę funkcji elementarnych, to jest takich funkcji liniowo niezależnych, dla których reakcję układu można wyrazić stosunkowo prosto (na przykład na funkcje trygonometryczne),
2. określeniu reakcji $u_k(t)$ układu na oddzielne funkcje elementarne,
3. sumowaniu poszczególnych reakcji układu.

W praktyce zwykle interesuje nas reakcja układu na najbardziej typowe lub najczęściej spotykane sygnały, np. impuls jednostkowy $\delta(t)$ lub — funkcję jednostkową $1(t)$.

Reakcję układu $h(t)$ na funkcję jednostkową nazywamy jednostkową funkcją przejściową układu. Reakcję układu na impuls jednostkowy Diraca nazwiemy impulsową funkcją przejściową układu $k(t)$.

Rozkład sygnału $E(t)$ na składowe elementarne można uzyskać na przykład stosując przekształcenie Fouriera

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^*(i\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

gdzie

$$E^*(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3)$$

które przedstawia sygnał $E(t)$ w postaci widma sygnałów elementarnych $e^{i\omega t}$. W przypadku impulsu jednostkowego $E(t) = \delta(t)$ widmo to jest ciągle o module jednostkowym i fazie $=0$. W realnych układach składowe tego widma są w określony sposób tłumione. Miara tego tłumienia jest funkcja $F(i\omega)$ zwana funkcją przekazywania układu. Zatem przy sygnale impulsowym $E(t) = \delta(t)$ reakcja spektralna będzie

$$U^*(i\omega) = F(i\omega) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Moduł funkcji przekazywania $A(\omega)$ nazywamy charakterystyką amplitudy, argument zaś tej funkcji $S(\omega)$ — charakterystyką fazową; zatem

$$F(i\omega) = A(\omega) e^{-iS(\omega)}. \quad (4)$$

W celu rozłożenia sygnału na składowe elementarne można również wykorzystać przekształcenie Carsona

$$E^{**}(p) = p \int_0^{\infty} E(t) e^{-pt} dt,$$

gdzie

$$\operatorname{Re} p = s > 0; \quad (5)$$

które przedstawia sygnał $E(t)$ na płaszczyźnie zespolonej $p = i\omega + s$.

Reakcję operatorową układu $K(p)$ na funkcję jednostkową $E(t) = 1(t)$ nazwiemy funkcją przenoszenia. W przypadku $s \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$\lim_{s \rightarrow 0} K(p) = F(i\omega). \quad (6)$$

Znając funkcję przenoszenia układu można określić jego reakcję

$$U^{**}(p) = K(p) \cdot E^{**}(p), \quad (7)$$

skąd

$$K(p) = \frac{U^{**}(p)}{E^{**}(p)}. \quad (8)$$

Warunek nieznieskształconego przekazywania sygnału $U(t)$ sprowadza się do zależności $U(t) = KE(t)$, gdzie $K = \text{const}$, czyli

$$\frac{U^*(i\omega)}{E^*(i\omega)} = A(\omega)e^{-iS(\omega)} = K, \quad (9)$$

to jest $A(\omega) = K$, $S(\omega) = \pm 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Jednakże wszystkie stosowane w praktyce układy zniekształcają sygnały przekazywane przez układ. Zniekształcenia te wyrażają się opadaniem charakterystyki amplitudy, która przy $\omega \rightarrow \infty$ dąży do zera, oraz odpowiednimi zniekształceniami fazy. Układy takiego typu są zatem niejako filtrami dolnoprzepustowymi. Dlatego też zwykle żąda się, by projektowany układ wnosił zniekształcenia możliwie najmniejsze w danych warunkach. Żądanie to jest jednak pozbawione sensu, o ile nie podaje się przy tym odpowiedniego kryterium zniekształceń.

Kryterium to najwygodniej jest sformułować w odniesieniu do charakterystyk czasowych układu, a następnie przetłumaczyć je na język charakterystyk częstotliwościowych. Jednakże najczęściej kryteria zniekształceń formułuje się w odniesieniu do charakterystyk częstotliwościowych w oparciu o przybliżone zależności czasowe. Na przykład w technice impulsowej projektowanie układów liniowych sprowadza się do urzeczywistnienia charakterystyki $A(\omega)$ mającej w przedziale $\left[0, \omega_g = \frac{a}{t_0}\right]$ wartość stałą². Kryterium takiego typu nie uwzględnia zarówno pełnego obrazu zniekształceń sygnału czasowego, jak i wpływu pozostałej gałęzi charakterystyki $A(\omega)$, to jest powyżej częstotliwości ω_g , na zniekształcenia sygnału oraz wpływu charakterystyki fazowej $S(\omega)$.

Z analizy teoretycznej wiadomo, że nagłe „obcięcie” charakterystyki amplitudy w punkcie ω_g prowadzi do układów nie dających się urzeczywistnić fizycznie; natomiast zbyt „wolny” charakter opadania charakterystyki $A(\omega)$ powoduje konieczność obniżenia ω_g , a tym samym wprowadza znaczne zniekształcenia sygnału.

W licznych pracach [2], [7], [8] podaje się, że w celu zapewnienia minimalnych zniekształceń sygnału optymalna charakterystyka amplitudy powinna mieć przy częstotliwości ω_g „garb” o wysokości 10 do 30%.

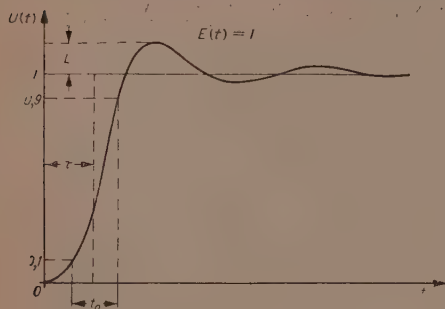
Prace te nie określają jednak charakterystyki amplitudy w sposób jednoznaczny. Dlatego wydaje się celowe znalezienie optymalnych cha-

¹ Można założyć, że $K=1$.

² t_0 — oznacza tu czas narastania czoła impulsu,

a — współczynnik $\approx \frac{3.5}{2\pi}$ [3].

rakterystyk amplitudy w oparciu o kryterium, które zapewniałoby nie tylko minimalny czas narastania sygnału, ale również minimum innych wielkości charakteryzujących zniekształcenie, na przykład wyskok L , tłumienie oscylacji oraz czas opóźnienia τ itp. (rys. 2).



Rys. 2. Reakcja układu na przyłożony sygnał jednostkowy.

Kryterium analitycznym, które uwzględnia powyższe czynniki, jest na przykład tak zwany błąd kwadratowy

$$I = \int_0^{\infty} [E(t - \tau) - U(t)]^2 dt, \quad (10)$$

gdzie τ — jest opóźnieniem impulsu $U(t)$. Błąd ten ma ponadto tę właściwość, iż wielkość tego błędu rośnie wraz z kwadratem odchylenia krzywych. Dlatego też kryterium powyższe znalazło zastosowanie przy projektowaniu

układów regulacji automatycznej oraz układów śledzących [1]. Wartość opóźnienia τ zależy od elementów układu przekazującego sygnały. W układach, w których opóźnienie jest niepożądane, należy przyjąć $\tau=0$. W innych układach (np. we wzmacniaczach impulsów telegraficznych lub telewizyjnych) opóźnienie nie jest związane ze zniekształceniem i dlatego można przyjąć kryterium (10), przy czym τ można otrzymać z warunku $\frac{\partial I}{\partial \tau} = 0$, bądź przyjmując, że czas ten pokrywa się z czasem opóźnienia grupowego [4a].

W realnych układach charakterystyka amplitudy ogranicza pewne pole skończone, przy czym powiększenie tego pola wymaga zastosowania układów korekcyjnych, sprzężenia zwrotnego itp., to znaczy, iż zależy od czynników konstrukcyjnych³. Na rysunku 3 przedstawiono charakterystyki normowane $A^2(\omega)$ wzmacniacza z różnymi układami korekcji, wybranymi w taki sposób, aby uniknąć wyskoków charakterystyki ponad wartość jednostkową: krzywa 1 odnosi się do układu bez korekcji, krzywa 2 odpowiada członowi z korekcją za pomocą indukcyjności w obwodzie anodowym, krzywa 3 — członowi z korekcją za pomocą indukcyjności szeregowej.

Mając zatem na względzie ograniczone możliwości konstrukcyjne, którymi dysponujemy przy projektowaniu układów liniowych, minimum

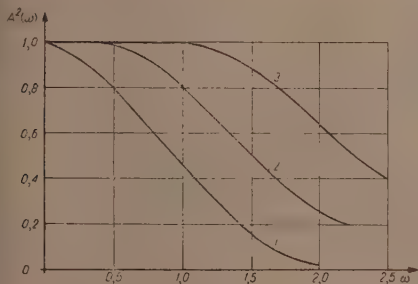
³ Na przykład gdy pojemność rozproszenia wzmacniacza wynosi C , to $A(\omega)$ przy $\omega \rightarrow \infty$ asymptotycznie zmierza do $\frac{1}{\omega C}$, wobec czego pole ograniczone przez $A(\omega)$ jest skończone.

funkcjonału (10) należy szukać przy oczywistym warunku dodatkowym

$$\int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = B < \infty. \quad (11)$$

Warunek ten ponadto określa wartość energii szumów na wyjściu układu przy „białym szumie” na jego wejściu. Dla rozpatrywanej klasy układów dolnoprzepustowych jest przy tym

$$A(0) = 1. \quad (12)$$



Rys. 3. Charakterystyki wzmacniacza z różnymi układami korekcji.

Na podstawie powyższych uwag rozważane zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia minimum funkcyjonału (10) przy dodatkowym warunku (11). Jest to izoperymetryczne zagadnienie wariacyjne [6]. Rozwiązanie powyższego zagadnienia dla konkretnych sygnałów wejściowych

oraz projektowanie układów liniowych w oparciu o otrzymane rezultaty podano w następnych rozdziałach.

2. OPTIMALNE CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE UKŁADÓW DOLNOPRZEPUSTOWYCH PRZY SYGNAŁACH JEDNOSTKOWYCH

Założmy, że sygnał wejściowy $E(t)$ ma kształt funkcji jednostkowej, to jest

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } t > 0. \end{cases} \quad (13)$$

W tym przypadku sygnał wyjściowy $U(t)$ ma kształt jednostkowej funkcji przejściowej układu $h(t)$.

Ponieważ w myśl założenia układ jest dolnoprzepustowy, przeto jego funkcja przejściowa spełnia następujące warunki

$$h(t) = 0 \quad \text{dla } t \leq 0, \quad (14)$$

$$h(\infty) = 1. \quad (15)$$

Funkcję przenoszenia tego układu

$$K(p) = p \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt$$

stosując całkowanie „per partes” można przedstawić następująco

$$K(p) = - \int_0^{\infty} h(t) d(e^{-pt}) = \int_0^{\infty} e^{-pt} h'(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} k(t) dt. \quad (16)$$

Zatem z równania (6) otrzymujemy

$$F(i\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} h'(t) dt. \quad (17)$$

Ponieważ dla (17) zachodzi równość

$$F(-i\omega) = F^*(i\omega), \quad (18)$$

warunek (11) można przedstawić jako

$$\int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} F(i\omega) F^*(i\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) F(-i\omega) d\omega = B. \quad (19)$$

Podstawiając wartość $F(i\omega)$ z (17) do (19) i zmieniając kolejność całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dt'' h'(t') h'(t'') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t'-t'')} d\omega. \quad (20)$$

Ponieważ wyrażenie

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t'-t'')} d\omega$$

przedstawia funkcję impulsową Diraca $\delta(t'-t'')$, otrzymujemy ostatecznie

$$\int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dt'' h'(t') h'(t'') \delta(t'-t'') = \pi \int_0^{\infty} h'^2(t) dt = B. \quad (21)$$

Zatem zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia funkcji przejściowej $h(t)$ spełniającej warunki (14), (15), (21) oraz minimalizującej funkcjonal

$$I = \int_0^{\infty} [1(t-\tau) - h(t)]^2 dt. \quad (22)$$

Aby uzyskać równanie Eulera, z którego można wyznaczyć ekstremalną funkcję $h(t)$, tworzymy pomocniczy funkcjonal

$$H = \int_0^{\infty} \{ \lambda h'^2(t) + [h(t) - 1(t-\tau)]^2 \} dt, \quad (23)$$

gdzie $\lambda = \text{const.}$

⁴ Gwiazdką * oznaczamy wielkość zespolono-sprzężoną.

Wariacja tego funkcjonału jest

$$\delta H = 2 \int_0^{\infty} \delta h(t) [-\lambda h''(t) + h(t) - 1(t-\tau)] dt + 2\lambda h'(t) \delta h(t) \Big|_0^{\infty}. \quad (24)$$

Zatem równanie Eulera-Lagrange'a wyraża się jako

$$-\lambda h''(t) + h(t) - 1(t-\tau) = 0. \quad (25)$$

Rozwiązanie ogólne równania (25), zawierające dwie stałe dowolne α i β , ma postać

$$h(t) = -k \int_{-\infty}^t \operatorname{sh} k(t-t') 1(t-\tau) dt' + \alpha e^{kt} + \beta e^{-kt}, \quad (26)$$

gdzie

$$k = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (27)$$

Ponieważ dla $t < \tau$ zachodzi $1(t-\tau) = 0$, a więc z równania (26) otrzymujemy

$$h(0) = \alpha + \beta = 0, \quad (28)$$

tak iż

$$h(t) = -k \int_{-\infty}^t \operatorname{sh} k(t-t') 1(t-\tau) dt' + \alpha \operatorname{sh} kt, \quad (29)$$

α jest tą stałą dowolną, którą można wyznaczyć z warunku $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$.

W równaniu (29) współczynnik k może mieć wartość rzeczywistą lub urojoną. Dlatego też dyskusję tego rozwiązania należy przeprowadzić dla obydwu przypadków i porównać wielkości błędów (22).

W przypadku k rzeczywistego i dodatniego dla $t > \tau$ otrzymujemy

$$h(t) = -k \int_0^{t-\tau} \operatorname{sh} k(t-\tau-t') dt' + \alpha \operatorname{sh} kt.$$

Wyrażenie to można przedstawić w postaci

$$h(t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-k(t-\tau)} + \frac{a}{2} e^{kt} - \frac{1}{2} e^{-k(t-\tau)} - \frac{a}{2} e^{-kt}. \quad (30)$$

Dwa ostatnie wyrazy w wzorze (30) przy $t \rightarrow \infty$ dążą do zera. Zatem aby

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$$

należy wybrać stałą a jako

$$a = e^{-k\tau}. \quad (31)$$

Ostatecznie przy k rzeczywistym otrzymujemy wyrażenie dla optymalnej funkcji przejściowej w postaci

$$h(t) = -k \int_{-\infty}^t \operatorname{sh} k(t-t') 1(t'-\tau) dt' + e^{-k\tau} \operatorname{sh} kt. \quad (32)$$

Równanie to można w sposób wyraźny przepisać jako:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-k\tau} \operatorname{sh} kt & \text{dla } \tau \geq t > 0. \end{cases} \quad (33a)$$

$$1 - \operatorname{ch} k\tau e^{-kt} \quad \text{dla } \infty > t \geq \tau. \quad (33b)$$

Na rysunku 4 przedstawiono wykres $h(t)$ dla $k\tau = 0, 1, 2$. Funkcja przenoszenia $K(p)$ odpowiadająca równaniu (33a, b) ma postać

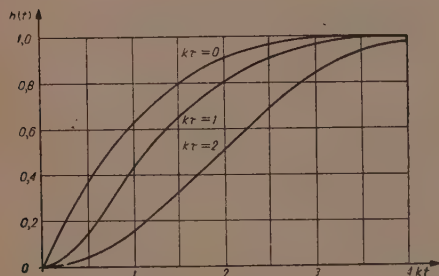
$$K(p) = \frac{k}{k^2 - p^2} (k e^{-p\tau} - p e^{-k\tau}). \quad (34)$$

Zatem dla optymalnych charakterystyk częstotliwościowych otrzymujemy następujące wyrażenia:

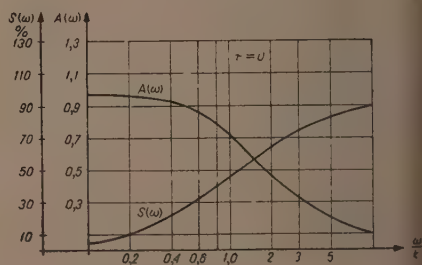
$$A(\omega) = \frac{k}{k^2 + \omega^2} \sqrt{k^2 + 2k\omega \sin \omega\tau e^{-k\tau} + \omega^2 e^{-2k\tau}}, \quad (35)$$

$$S(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{k \sin \omega\tau + \omega e^{-k\tau}}{\cos \omega\tau}. \quad (36)$$

Wykresy powyższych charakterystyk dla $\tau = 0$ przedstawiono na rys. 5.



Rys. 4. Optymalne charakterystyki przejściowe.



Rys. 5. Optymalne charakterystyki częstotliwościowe przy $\tau = 0$.

Wartość parametru k można określić z warunku

$$\int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} h'^2(t) dt = B. \quad (37)$$

Podstawiając do (37) wartość $h'(t)$ obliczoną z (33a i b) otrzymujemy

$$B = \frac{\pi k}{4} (1 + e^{-y} + y e^{-y}), \quad (38)$$

gdzie $y = 2k\tau$, skąd przy założeniu, że τ dane jest parametrycznie jako funkcja y przez:

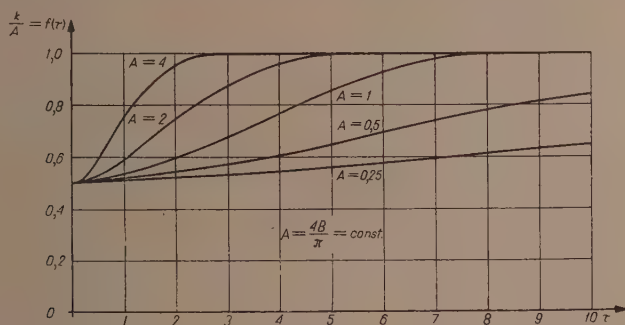
$$\tau = \frac{1}{2k} y = \frac{y\pi}{8B} (1 + e^{-y} + y e^{-y}), \quad (39)$$

otrzymujemy wartość k jako funkcję y w postaci następującej

$$k = \frac{4B}{\pi(1 + y e^{-y} + e^{-y})}. \quad (40)$$

Dla danego τ oraz B ze wzoru (40) można obliczyć odpowiednią wartość k .

Wykres wartości współczynnika $k = Af(\tau)$ przy $A = \text{const}$, podano na rys. 6.



Rys. 6. Wykres wartości współczynnika $k = Af(\tau)$ przy $A = \text{const}$.

Podstawiając do (22) wartość $h'(t)$ obliczoną ze wzoru (33a, b) znajdziemy

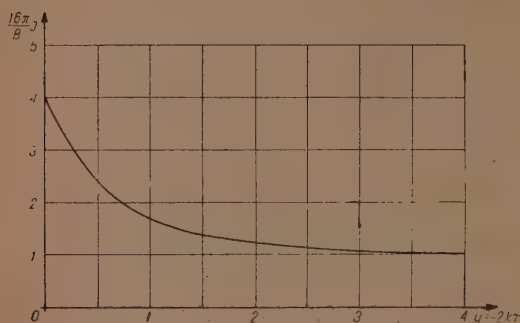
$$I_r = \frac{1}{4k} (1 + e^{-y} - y e^{-y}) = \frac{\pi}{16B} [(1 + e^{-y})^2 - y^2 e^{-2y}]. \quad (41)$$

Wykres funkcji

$$\frac{16B}{\pi} I_r = (1 - e^{-y})^2 - y^2 e^{-2y}$$

⁵ I_r oznacza wartość błędu (22) przy k rzeczywistym.

przedstawiono na rys. 7. Jak wynika z tego rysunku, zniekształcenia I_r maleją ze wzrostem opóźnienia τ dążąc asymptotycznie do stałej wartości



Rys. 7. Wykres zniekształceń I_r w funkcji opóźnienia k

$$I_{r \min} = \frac{\pi}{16B}. \text{ Inaczej mówiąc,}$$

z dwóch układów liniowych o jednakowej wartości B — układ o większej stromości charakterystyki fazowej (tj. o większym czasie opóźnienia $k\tau$) daje mniejsze zniekształcenia impulsu o kształcie jednostkowym.

W przypadku k urojonego błąd I_i okazuje się znacznie większy niż dla k rzeczywistego (patrz przypisy) i w związku z tym przypadek ten posiada mniejszą wartość praktyczną.

3. PROJEKTOWANIE OPTYMALNYCH UKŁADÓW LINIOWYCH

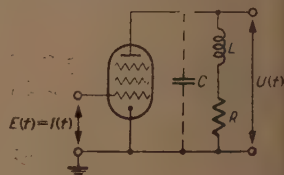
Wyniki otrzymane w poprzednim rozdziale pozwalają wysnuć następujące wnioski.

Dla uzyskania minimalnych zniekształceń:

- pole ograniczone kwadratem charakterystyki amplitudy powinno być maksymalne,
- odchylenie charakterystyki amplitudy układu od charakterystyki optymalnej powinno być minimalne.

Jednakże nie we wszystkich układach warunki te mogą być wypełnione. Rozpatrzmy na przykład wzmacniacz impulsów prostokątnych z prostą korekcją (rys. 8).

Charakterystyki $A^2(\omega)$ tego wzmacniacza, dla różnych wartości współczynnika korekcji $\kappa = \frac{L}{R^2 C}$



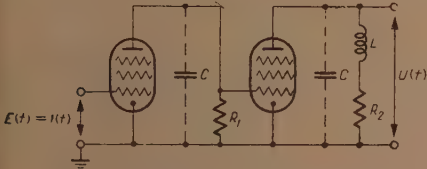
Rys. 8. Schemat wzmacniacza z prostą korekcją.

przedstawiono na rysunku 9. Jak wynika z tego rysunku, w celu powiększenia pola ograniczonego krzywą $A^2(\omega)$ należy powiększyć współczynnik korekcji κ . Powoduje to jednak odchylenie się od optymalnej charakterystyki amplitudy, która odpowiada $\kappa=0$.

Zatem optymalną wartość współczynnika korekcji (κ_{opt}) można otrzymać na drodze kompromisu między wartością odpowiadającą optymalnej powierzchni a wartością odpowiadającą optymalnej charakterystyce amplitudy. W przypadku układów prostszych wartość ta może być wyznaczona z warunku $\frac{\partial I}{\partial \kappa} = 0$ [4a].

Na przykład dla $\tau = 0$ wartość powyższa $\kappa_{\text{opt}} = 0,5$.

W przypadku układu dwuczłonowego, przedstawionego na rys. 10, κ_{opt} może osiągnąć jeszcze większą wartość. Na przykład dla $\tau = 0$, $R_1 = R_2$, $\kappa_{\text{opt}} = 0,8$ [4a]. Charakterystyki takiego wzmacniacza przedstawiono na rys. 11.

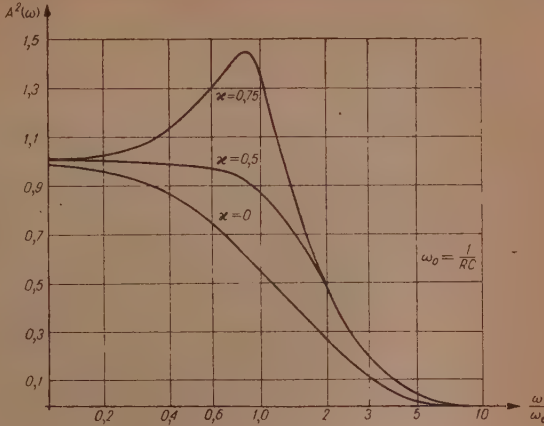


Rys. 10. Schemat wzmacniacza dwuczłonowego.

$= A_1^2(\omega) \cdot A_2^2(\omega)$ powyższego wzmacniacza odchyła się jednak w mniejszym stopniu od charakterystyki optymalnej.

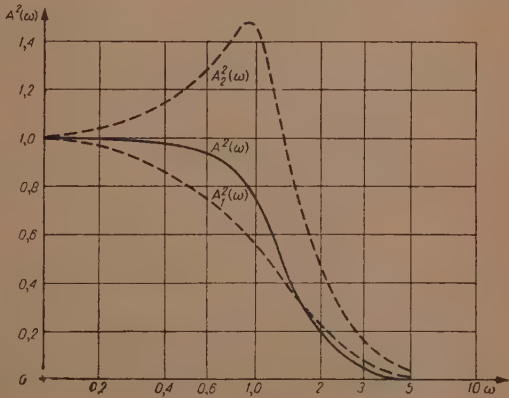
Uogólniając powyższe rozważania można polecić następujący sposób projektowania układów wielostopniowych:

- a. Należy określić charakterystykę optymalną, odpowiadającą danej wartości B (wybór wartości B zależy od



Rys. 9. Charakterystyki wzmacniacza z prostą korekcją.

Jak wynika z rys. 11, charakterystyka drugiego stopnia $A_2^2(\omega)$ odchyła się znacznie od krzywej optymalnej ograniczając jednak duże pole. Charakterystyka wypadkowa $A^2(\omega) =$



Rys. 11. Charakterystyki wzmacniacza dwuczłonowego.

środków konstrukcyjnych, którymi rozporządzamy przy projektowaniu układu).

- b. Należy tak wybrać charakterystyki poszczególnych członów układu, aby pola ograniczone krzywymi $A_k^2(\omega)$ były maksymalne.
- c. Charakterystyka wypadkowa wszystkich członów powinna aproksymować jedną z charakterystyk optymalnych.

Im większą liczbę członów ma układ projektowany, tym większe mogą być powierzchnie reprezentowane przez poszczególne człony tego układu.

Na rys. 12 przedstawiono charakterystyki trójczłonowego wzmacniacza impulsów prostokątnych, w którym charakterystyki poszczególnych członów

wybrano w taki sposób, aby charakterystyka wypadkowa aproksymowała optymalną charakterystykę amplitudy (krzywa ciągła).

Dla ułatwienia procesu aproksymacji charakterystyki optymalnej można wykorzystać metodę opisaną przez J. G. Linvilla [5] lub metodę wyrównywania maksymów [4].

Metoda opierająca się na powyższych zależnościach nadaje się zatem szczególnie do projektowania układów wieloczłonowych

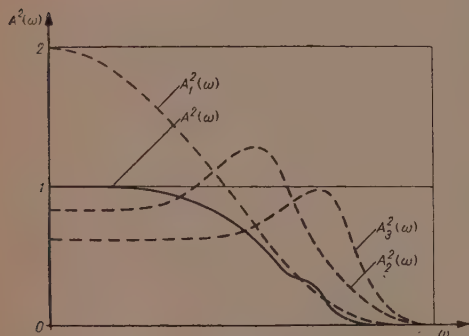
(np. wieloczłonowych wzmacniaczy impulsowych, układów korekcji zniekształceń impulsów, złożonych układów regulacji automatycznej itp.), w przypadkach gdy inne metody określenia optymalnych parametrów napotykają trudności.

Projektowany układ, którego człony zostały określone z warunków aproksymacji charakterystyk optymalnych, może być urzeczywistniony drogą syntezy.

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej PAN
Instytut Fizyki PAN

WYKAZ LITERATURY

1. Dustan G., Lathrop W. — The synthesis of „optimum“ transfer response. Criteria and standard. Transaction of A. I. E. E. p. II. Nov. 1953.
2. Detali i elementy radiolokacyjnych stacji. Sow. Rad. Moskwa 1953 (tłum. z ang.).
3. Icchoki Ja. S. — Impulsnaja technika. Sow. Rad., Moskwa 1949.
4. Kulikowski R. — Obliczanie liniowych układów impulsowych. Arch. Elektrot. T. 3, zeszyt 2, 1954.



Rys. 12. Charakterystyki wzmacniacza trójczłonowego.

- 4a. Kulikowski R. — Wyznaczanie optymalnych parametrów układów liniowych na podstawie charakterystyk czasowych. Arch. Elektrot. T. 4, zeszyt 2, 1955.
5. Linvill J. G. — The approximation with rational functions of prescribed magnitude and phase characteristics. PIRE, nr 7, 1952.
6. Ławrientiew M., Lusternik L. — Rachunek wariacyjny. Warszawa 1953 (tłum. z ros.).
7. Łukaszewicz L. — Wpływ zniekształceń liniowych na dokładność rozwiązań elektronowego analizatora równań różniczkowych. Arch. Elektrot. T. 1, zeszyt 2, 1952.
8. Philips R., James H., Nichols N. — Theory of servomechanism. MIT, T. 25, 1947.

PRZYPISY

W przypadku urojonej wielkości $k=i\mu$ z równania (29) otrzymujemy

$$h(t) = \mu \int_{-\infty}^t \sin \mu(t-t') 1(t'-\tau) dt' + b \sin \mu t, \quad (1')$$

gdzie

$$b = ia.$$

Ponieważ $1(t'-\tau)=0$ dla $t'-\tau \leq 0$, równanie to można przedstawić jako

$$h(t) = 1 - \cos \mu(t-\tau) + b \sin \mu t.$$

Ponieważ funkcja $h(t)$ w myśl założenia dąży do jedności, powinny być spełnione warunki:

$$b - \sin \mu \tau = 0,$$

$$\cos \mu \tau = 0,$$

skąd

$$\tau = \frac{1}{\mu} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (2')$$

$$b = (-1)^n, \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (3')$$

Jak widzimy, opóźnienie τ w przypadku niniejszym może mieć tylko wartości określone wzorem (2'). Zatem optymalna funkcja przejściowa dla urojonej wartości k wyraża się następująco ⁶:

$$h(t) = \mu \int_{-\infty}^t \sin \mu(t-t') 1(t'-\tau) dt' + (-1)^n \sin \mu t,$$

czyli

$$h(t) = \begin{cases} (-1)^n \sin \mu t, & \text{dla } 0 < t \leq \tau = \frac{1}{\mu} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \\ 1 & \text{dla } \tau \leq t. \end{cases} \quad (4')$$

Wartość μ znajdujemy wyliczając

$$B = \pi \int_0^{\infty} h^2(t) dt = \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \mu, \quad \text{skąd} \quad \mu = \frac{2B}{\pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)}. \quad (5')$$

⁶ Przy oczywistym założeniu, że τ spełnia warunek (2').

Podstawiając powyższą wartość do (2') otrzymujemy równanie

$$\tau = \frac{\pi^3 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{2B} \quad (6')$$

Wartość zniekształceń dla τ określonego wzorem (6') znajdujemy podstawiając (4') do (22), to jest

$$I_i = \int_0^{\infty} [h(t) - 1(t - \tau)]^2 dt = \frac{1}{2\mu} \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{4B} \pi^2. \quad (7')$$

Porównując ten błąd z błędem odpowiadającym rzeczywistej wartości k (41) widzimy, że dla każdego n jest $I_r < I_i$. Na przykład dla $n=0$ ze wzoru (6') otrzymujemy

$$\tau = \frac{\pi^2}{8B}.$$

Podstawiając wartość powyższą do (39) otrzymujemy równanie

$$\frac{\pi}{8B} y(1 + e^{-y} + ye^{-y}) = \frac{\pi^3}{8B},$$

czyli

$$y(1 + e^{-y} + ye^{-y}) = \pi^2.$$

Skąd $y \approx 10$, a przeto

$$I_r \approx \frac{\pi}{16B}, \quad I_i = \frac{\pi^3}{16B}.$$

Błąd I_i jest więc około 10 razy większy od błędu I_r . Dla większych n stosunek tych błędów jeszcze bardziej się zwiększy. Wynika stąd, że optymalna charakterystyka odpowiada rozwiązaniu dla k rzeczywistego.

Р. КУЛИКОВСКИ, Г. ПЛЕБАНЬСКИ

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Резюме

В настоящей работе определяются оптимальные частотные характеристики линейных систем (т. е. характеристики соответствующие минимальным искажениям импульсного сигнала).

В качестве критерия искажений принято величину

$$I = \int_0^{\infty} [1(t - \tau) - h(t)]^2 dt, \quad (1)$$

где

$1(t)$ — единичный входной сигнал, который обращается в нуль для $t < 0$,

$h(t)$ — реакция системы при единичном воздействии,

τ — опаздывание сигнала в данной системе.

Так как амплитудная характеристика $A(\omega)$ ограничивает конечную площадь (при чём величина этой площади зависит от факторов конструктивного порядка, т. е. может

быть увеличена путём применения схем коррекции, обратной связи и т. д.) минимум функционала (1) находится при добавочном условии

$$\int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} h'^2(t) dt = B < \infty \quad (2)$$

Величина (2) равна энергии шумов на выходе системы, при „белом шуме” на входе этой-же системы.

Поставленная задача является изопериметрической вариационной задачей. Уравнение Эйлера, которое определяет решение поставленной задачи, имеет следующий вид

$$-\lambda h''(t) + [1(t-\tau) - h(t)] = 0, \quad (3)$$

где $\lambda = \text{const.}$

Решение этого уравнения для $h(0)=0$ и $h(\infty)=1$ имеет следующий вид

$$h(t) = \begin{cases} e^{-k\tau} \text{sh } kt & \text{для } 0 \leq t \leq \tau, \\ 1 - \text{ch } k\tau e^{-kt} & \text{для } \tau \leq t \leq \infty, \end{cases} \quad (4)$$

где $k = 1/\sqrt{\lambda}$

Функцию (4) представлено на рис. 4.

Соответствующее выражение для частотных характеристик приобретает следующий вид

$$A(\omega) = \frac{k}{k^2 + \omega^2} \sqrt{k^2 + 2k\omega \sin \omega\tau e^{-k\tau} + \omega^2 e^{-2k\tau}}, \quad (5)$$

$$S(\omega) = -\arctg \frac{k \sin \omega\tau + \omega e^{-k\tau}}{\cos \omega\tau}, \quad (6)$$

где $A(\omega)$, $S(\omega)$ — амплитудная и фазовая частотные характеристики.

Соответствующие этому решению значения B и I выражаются

$$B = \frac{\pi k}{4} (1 + e^{-y} + y e^{-y}), \quad y = 2k\tau \quad (7)$$

$$I = \frac{\pi}{16B} [(1 + e^{-y})^2 - y^2 e^{-y}] \quad (8)$$

На рис. 6 представлен график зависимости $\frac{16B}{\pi} I = f(y)$

При заданном τ в виде

$$\tau = \frac{1}{2k} y = \frac{y\pi}{8B} (1 + y e^{-y} + e^{-y}) \quad (9)$$

коэффициент k выражается:

$$k = \frac{4B}{\pi(1 + y e^{-y} + e^{-y})} \quad (10)$$

В случае мнимого k ($k = i\mu$) соответствующее решение обладает искажениями $\frac{(n+1/2)^2 \pi^2}{4B}$ где $n=1, 2, 3 \dots$ которые значительно превышают искажения получаемые в случае k действительного.

На основе полученных результатов можно сформулировать следующее:

- а. В линейном четырёхполюснике, в котором задано величины B : (т. е.) величину площади ограниченной характеристикой $A^2(\omega)$ или энергию выходных шумов), а также опаздывание τ , имеются частотные характеристики, которые определяются единственным образом, и которые соответствуют минимальным искажениям импульсного сигнала $1(t-\tau)$.
- б. В линейном четырёхполюснике, в котором задано I и τ существуют частотные характеристики, которые обеспечивают минимум B (это следует из известного „принципа взаимности” изопериметрических вариационных задач).
- в. Полученные результаты представляют также непосредственный практический интерес. Например в случае проектирования многокаскадных импульсных систем можно рекомендовать следующее:
 1. амплитудные характеристики отдельных каскадов $A_k(\omega)$ следует подобрать таким образом чтобы площади B_k ограниченные кривыми $A_k^2(\omega)$ были максимальные.
 2. результирующая характеристика $A(\omega)$ всех каскадов должна аппроксимировать оптимальную характеристику являющуюся экстремалью для результирующего $B = \sum B_k$

R. KULIKOWSKI, J. PLEBAŃSKI

THE OPTIMUM FREQUENCY CHARACTERISTICS OF DYNAMIC LINEAR CIRCUITS

Summary

In this paper the optimum frequency characteristics of linear circuits are determined (i. e. characteristics corresponding to the smallest distortion of the impulse signal).

As a distortion criterion was accepted the quantity

$$I = \int_0^{\infty} [1(t-\tau) - h(t)]^2 dt, \quad (1)$$

where

- $1(t)$ — unit input signal, which for $t < 0$ is 0,
- $h(t)$ — circuit response to the unit signal,
- τ — delay of the signal in the circuit.

As the $A(\omega)$ amplitude characteristics of the circuit usually limits the area (which depends on the design, i. e. may be enlarged by the application of correction circuits, feed back etc.) the minimum of equation (1) occurs at an additional condition

$$\int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} h'^2(t) dt = B < \infty. \quad (2)$$

The equation (2) is equal to the noise energy at the circuit output at the „white noise” at its input.

The above problem is a variational problem of an isoperimetric type. The Euler-Lagrange equation in the solution of this problem has the following form:

$$-\lambda h''(t) + [1(t-\tau) - h(t)] = 0, \quad (3)$$

where $\lambda = \text{const.}$

The solution of this equation when $h(0)=0$, $h(\infty)=1$ is:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-k\tau} \operatorname{sh} kt & \text{for } 0 \leq t \leq \tau \\ 1 - \operatorname{ch} k\tau e^{-kt} & \text{for } \tau \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (4)$$

where $k=1/\sqrt{\lambda}$.

The graph of the function $h(t)$ is given in Fig. 4.

The frequency characteristics corresponding to (4) are expressed by

$$A(\omega) = \frac{k}{k^2 + \omega^2} \sqrt{k^2 + 2k\omega \sin \omega\tau e^{-k\tau} + \omega^2 e^{-2k\tau}}, \quad (5)$$

$$S(\omega) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{k \sin \omega\tau + \omega e^{-k\tau}}{\cos \omega\tau}, \quad (6)$$

where $A(\omega)$, $S(\omega)$ — are amplitude and phase characteristics.

The values B and I corresponding to the solution (4) are

$$B = \frac{\pi k}{4} (1 + e^{-y} + 2ye^{-y}), \quad y = 2k\tau \quad (7)$$

$$I = \frac{\pi}{16B} [(1 + e^{-y})^2 - y^2 e^{-2y}] \quad (8)$$

Fig. 6 presents the relation $\frac{16B}{\pi} I = f(y)$.

With the given τ as

$$\tau = \frac{1}{2k} y = \frac{y\pi}{8B} (1 + ye^{-y} + e^{-y}). \quad (9)$$

The coefficient k will be

$$k = \frac{4B}{\pi(1 + ye^{-y} + e^{-y})}. \quad (10)$$

In the case of an imaginary k ($k=i\mu$) the solution $h(t)$ gives the distortion

$$I = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{4B}$$

where $n=1,2,\dots$ which considerably exceeds the distortion obtained in the case when k is real.

On the basis of the obtained results a series of conclusions may be formulated:

- In a linear network (quadripole), in which the value B and τ are given, there are frequency characteristics, which ensuring minimum impulse signal distortions.
- In a linear network (quadripole), where I and τ are given, there are frequency characteristics ensuring minimum B . (This follows from the "reciprocity principle" of the isoperimetric problems).

- c) The obtained results have also practical importance. E. g. in the case of designing multistage pulse networks the following principles may be recommended:
1. the characteristics $A_k(\omega)$ of the separate stages should be chosen in such a way that the areas B_k limited by these characteristics might be maximum,
 2. the resultant characteristic $A(\omega)$ of all stages should approximate the optimum characteristic, which is the extremity for the resultant $B = \sum B_k$.

621.315.61:621.315.62

J. GZYLEWSKI

O wpływie zmian przenikalności dielektrycznej na rozkład pola elektrycznego w przepustach kondensatorowych

Rękopis dostarczono 8. 11. 1954

Rozważono wpływ zmiany przenikalności dielektrycznej na rozkład pola elektrycznego w izolatorach przepustowych kondensatorowych. Autor przypuszcza, iż w przepustach na duże prądy ciepło, wydzielające się w sworzniu przy prądzie roboczym i przepływające przez materiał izolacyjny, wywołuje niepomijalne zmiany przenikalności dielektrycznej (ϵ) wzdłuż promienia przepustu. Pociąga to za sobą zmianę rozkładu pola elektrycznego w stosunku do rozkładu przy $\epsilon = \text{const.}$, co może być przyczyną obniżania się wytrzymałości na przeskok przy częstotliwości sieciowej. Możliwe jest również występowanie zjawiska erozji. W pracy podano dla przepustu o danych znamionowych 60 kV, 750 A, wyniki pomiarów osiowego rozkładu pola elektrycznego oraz napięcia przeskoku przy częstotliwości sieciowej przy prądzie znamionowym 900 A i w stanie bezprądowym. Stwierdzono obniżenie się napięcia przeskoku o około 10%.

Podjęte zostały również próby rachunkowego ujęcia wpływu zmian przenikalności dielektrycznej na rozkład pola elektrycznego. Poczyniono tu pewne założenia, które wymagają jeszcze eksperymentalnego sprawdzenia.

1. WSTĘP

Myśl budowy przepustów ze sterowanym polem elektrycznym powstała na początku XX wieku. Jak podaje K. Humburg [1] pierwsza praca z tej dziedziny ukazała się w roku 1906. Autorem jej był R. Nagel, który udowodnił, iż umieszczając w materiale izolacyjnym wkładki przewodzące, czyli tak zwane ekrany, można wpływać na rozkład pola elektrycznego wewnątrz przepustów. Przypuszczał on, iż drogą odpowiedniego doboru wymiarów ekranów można uzyskać jednostajny rozkład naprężeń elektrycznych zarówno osiowy, jak i promieniowy. Nagel nie doprowadził swych rozważań do ustalenia sposobu obliczeń. Dopiero w roku 1923 Humburg [1] podał ogólną teorię obliczania przepustów kondensatorowych, udowadniając przy tym, iż nie jest możliwe jednoczesne uzyskanie jednostajnego rozkładu pola zarówno w kierunku promieniowym, jak i osiowym.

Późniejsze prace A. Imhofa [2] podają praktyczne metody obliczania przepustów kondensatorowych, jednakże podobnie jak i w teorii Humburga przyjęto założenie, iż przenikalność dielektryczna ϵ jest stała w całej masie izolacyjnej przepustu.

W niektórych rozwiązaniach konstrukcyjnych przepustów prąd przepływający przez sworzeń wywołuje wewnątrz przepustu pole temperaturowe. Pole to powoduje zmiany przenikalności dielektrycznej, pociągające za sobą zmianę rozkładu pola elektrycznego w stosunku do rozkładu występującego przy stałym ϵ . Zmiany te wpływają między innymi na napięcie przeskoku izolatorów. W pracy niniejszej podano wyniki badań eksperymentalnych rozkładu pola elektrycznego w przepustach ze zmiennym ϵ oraz podjęto próby rachunkowego uwzględnienia zmian ϵ przy obliczaniu przepustów kondensatorowych.

2. STAN OBECNY ZAGADNIENIA

Przepusty kondensatorowe obliczane są na ogół na jednostajny osiowy rozkład naprężeń. Rozwiązanie takie prowadzi do uzyskania wysokiej wytrzymałości na przeskoki w stosunku do wymiarów gabarytowych przepustu. Podane przez Humburga metody obliczeniowe pozwalają, z dostateczną dla praktyki dokładnością, ustalić wymiary oraz rozkład ekranów konieczny dla uzyskania jednostajnego osiowego rozkładu naprężeń. Metody te zakładają, iż przenikalność dielektryczna ϵ jest stała w całej masie izolacyjnej przepustu. Założenie to jednak nie zawsze jest słuszne, gdyż materiał izolacyjny przewodzi pewne ilości ciepła, którego źródłem są straty Joule'a wywołane przepływem prądu roboczego przez sworzeń przepustu. Przepływ ten powoduje występowanie gradientów temperaturowych, pociągających za sobą zmianę przenikalności dielektrycznej. W przepustach na duże prądy straty Joule'a przewodzone przez materiał izolacyjny mogą znacznie przewyższać straty dielektryczne i mogą głównie decydować o rozkładzie temperatur wewnątrz przepustu. Związana z tym zmiana rozkładu ϵ , poza obniżeniem napięcia przeskoku, może prowadzić przy pełnym obciążeniu prądowym przepustu do występowania zjawiska erozji [3], niebezpiecznego dla wytrzymałości długotrwałej. Wydaje się więc konieczne, aby obliczanie przepustów na duże prądy uwzględniało zmiany ϵ spowodowane przepływem prądu przez sworzeń.

3. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ PROMIENIOWYCH W PRZEPUSZCIE NIESTEROWANYM Z UWZGLĘDNIENIEM ROZKŁADU TEMPERATUR

Rozważony zostanie przepust niesterowany, przez którego sworzeń przepływa prąd J (rys. 1). Ciepło Joule'a wydzielające się w sworzeniu przy dużym stosunku długości do promienia $l : r$ przenosi się do otoczenia

głównie przez materiał izolacyjny. Dla części środkowej przepustu można założyć, iż kierunek strumienia cieplnego q jest normalny do osi izolatora, zatem gradient temperaturowy określony może być wzorem

$$-\frac{dt}{dr} \cdot \lambda = q, \quad (1)$$

gdzie λ — przewodność cieplna materiału izolacyjnego przyjęta jako stała w $\frac{\text{W} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$.

Oznaczając

$$a = \frac{P}{2\pi\lambda},$$

gdzie P oznacza straty na jednostkę długości sworznia w $\frac{\text{W}}{\text{cm}}$ równanie (1) można przedstawić w postaci

$$-\frac{dt}{dr} = \frac{a}{r}. \quad (2)$$

Dla ustalonego przepływu ciepła po scałkowaniu otrzymamy znany wzór

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_2 &= a \ln \frac{r_2}{r_1} \\ t &= t_1 - a \ln \frac{r}{r_1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

gdzie

t_1 — oznacza temperaturę sworznia przepustu,

t — temperaturę w punkcie odległym od środka przepustu o r ,

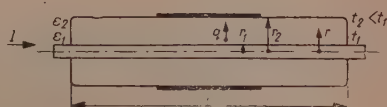
t_2 — temperaturę powierzchni przepustu.

Dla papierów bakelizowanych można przyjąć [4], iż zmiana przenikalności dielektrycznej z temperaturą przebiega według funkcji wykładniczej

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 e^{\sigma t} \quad (4)$$

Pomiary krajowych materiałów izolacyjnych (papier bakelizowany) wykazały również, iż zależność $\varepsilon = f(t)$ ma charakter wykładniczy, przy czym wykładnik σ wynosi średnio $4,6 \cdot 10^{-3}$. Uwzględniając (3) i (4) rozkład ε wzdłuż promienia wywołany rozkładem temperatur będzie

$$\varepsilon_r = \varepsilon_2 e^{\sigma(t-t_2)} = \varepsilon_2 e^{\sigma a \ln \frac{r_2}{r}} = \frac{A}{r^b}, \quad (5)$$



Rys. 1. Przepust niesterowany, przez którego sworzeń przepływa prąd I .

gdzie σ oznacza wykładnik przyrostu ε z temperaturą, stałe zaś A i b wynoszą

$$A = \varepsilon_2 r_2^{\sigma a},$$

$$b = \sigma a.$$

ε_2 jest przenikalnością dielektryczną materiału znajdującego się w odległości r_2 od środka przepustu. Rozkład ε wzdłuż promienia jest więc niezależny od temperatury powierzchni oraz sworznia izolatora.

Wzór (5) nie uwzględnia gradientu temperaturowego wywołanego istnieniem źródeł ciepła wewnątrz materiału izolacyjnego (straty dielektryczne) oraz lokalnymi przegrzaniem wynikającymi z niejednorodności materiału.

Ponieważ przy dużych prądach płynących przez sworzeń, ilości ciepła przewodzone przez materiał izolacyjny są dużo większe od ciepła strat dielektrycznych, można w przybliżeniu przyjąć, iż o rozkładzie temperatury wewnątrz przepustu decyduje wyłącznie ciepło wydzielające się w sworzniu i przepływające przez izolację. Pomijając wpływ upływności materiału izolacyjnego na rozkład pola elektrycznego, natężenie w punkcie r wynosić będzie

$$K(r) = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot \varepsilon_r}, \quad (6)$$

gdzie Q oznacza ładunek elektryczny doprowadzony do izolatora. Napięcie U przyłożone do izolatora może być określone

$$U = \int_{r_1}^{r_2} K_r dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot \frac{A}{r^b}} dr = \frac{Q}{2\pi \cdot A \cdot b} (r_2^b - r_1^b). \quad (7)$$

Podstawiając wzór (7) do (6) otrzymamy:

$$K_r = \frac{U \cdot b \cdot r^{b-1}}{r_2^b - r_1^b} \dots \dots \frac{\text{kV}}{\text{cm}}, \quad (8)$$

jeżeli U w kV i r w cm.

Ze wzoru (8) wynika, iż ze wzrostem prądu płynącego przez sworzeń (czynnik $b = \sigma a$ dąży do jedności) rozkład naprężeń promieniowych ujednostajnia się, a układ zbliża się do układu płaskiego.

I tak na przykład w układzie izolacyjnym o wymiarach $r_1 = 1,25$ cm, $r_2 = 6$ cm (przedstawionym na rys. 1), wykonanym z papieru bakelizowanego, przy napięciu 60 kV i prądzie 900 A oraz gęstości prądu w sworzniu Cu około $1,85$ A/mm² obliczone naprężenia maksymalne wynoszą: $K_{1\max} = 28$ kV/cm, w przypadku zaś stałej przenikalności ε , a więc w stanie bezprądowym — $K_{1\max} = 31$ kV/cm. Jak wynika naprężenia maksymalne obniżają się o około 10%.

4. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ W PRZEPUŚCIE STEROWANYM PRZY UWZGLĘDNIENIU ROZKŁADU TEMPERATUR

Podobnie jak w przepuście niesterowanym, przepływ ciepła przez izolację wywołuje niejednakowy rozkład ε . Stąd rozkład naprężeń zależy od wartości prądu płynącego przez sworzeń przepustu. Przy małych prądach zmiany ε są niewielkie i praktycznie nie wpływają na rozkład pola. Niektóre jednak typy przepustów budowane są na prądy rzędu 1000 A (na przykład przepusty transformatorowe oraz przekładnikowe) i tu wpływ zmian ε staje się wyraźny.

Według Humburga dla przepustu idealnego naprężenia promieniowe i osiowe wynoszą:

$$K_r = \frac{dU}{dr} = \frac{U}{r \cdot l} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r \cdot l}, \quad (9)$$

$$K_l = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{dl}{dr}, \quad (10)$$

gdzie r i l oznaczają promień i długość dowolnej okładziny sterującej (rys. 2), przy czym $l = f(r)$.

Zależność (9) i (10) wyprowadzone są przy założeniu:

1. stałej przenikalności dielektrycznej ε ,
2. nieskończonej liczby elektrod sterujących,
3. zamykania się linii sił pola elektrycznego wyłącznie wewnątrz przepustu.

Znajomość funkcji $l = f(r)$ pozwala na obliczenie K_r , K_l i odwrotnie — dla żadanego rozkładu K_r i K_l można znaleźć zależność $l = f(r)$. Dla celów praktycznych najkorzystniejszy okazał się przepust z jednostajnym osiowym rozkładem naprężeń i dla niego Humburg określa zależność $l = f(r)$, a mianowicie

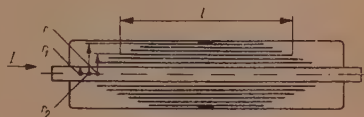
$$l' = \sqrt{l - 2 \ln l' r'}, \quad (11)$$

gdzie

$$l' = \frac{l}{l_0} \quad \text{i} \quad r' = \frac{r}{r_0};$$

l_0 i r_0 jest to długość i promień elektrody sterującej (rzeczywistej lub fikcyjnej), dla której naprężenia promieniowe osiągają minimum.

Doświadczenie wykazuje, iż zależność (11) nie może być stosowana dla przepustów, przez których sworzeń płyną prądy rzędu 1000 A, gdyż



Rys. 2. Przekrój podłużny przepustu sterowanego — kondensatorowego.

rozkład pola ulega zmianie co, między innymi, prowadzi do obniżenia napięcia przeskoku przy częstotliwości sieciowej. W tych przypadkach konieczne jest uwzględnienie wpływu zmian ε na rozkład naprężeń. Przy założeniach analogicznych jak dla przepustu niesterowanego, przenikalność ε zmieniać się będzie według wzoru (15), który w innej postaci może być przedstawiony jako

$$\varepsilon_r = \varepsilon_2 \left(\frac{r_2}{r} \right)^{\sigma a} \quad (12)$$

Przy nieskończonej liczbie elektrod sterujących oraz założeniu, iż wszystkie linie pola zamykają się w przepuscie, można napisać

$$d\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{dr}{\varepsilon_2 \left(\frac{r_2}{r}\right)^{\sigma a} l \cdot r \cdot r} \quad (13)$$

oraz

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(\frac{r_2}{r}\right)^{\sigma a} \cdot l \cdot r} \quad (14)$$

gdzie C stanowi pojemność całkowitą izolatora.

Napięcie dU na poszczególnych kondensatorach są odwrotnie proporcjonalne do pojemności, a więc

$$\frac{dU}{U} = \frac{d\left(\frac{1}{C}\right)}{\frac{1}{C}} = \frac{dr}{\varepsilon_2 \left(\frac{r_2}{r}\right)^{\sigma a} l \cdot r} : \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(\frac{r_2}{r}\right)^{\sigma a} \cdot l \cdot r},$$

stąd

$$K_r = \frac{dU}{dr} = \frac{U}{r^{1-\sigma a} \cdot l} : \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{1-\sigma a} \cdot l} \quad (15)$$

Jeżeli naprężenia osiowe mają być stałe (przepust z jednostajnym osiowym rozkładem naprężeń), to zgodnie z równaniem (10)

$$K_l = \frac{dU}{dr} : \frac{dl}{dr} = \text{const},$$

co przy uwzględnieniu zależności (15) pociąga za sobą warunek

$$r^{1-\sigma a} \cdot l \cdot \frac{dl}{dr} = \text{const} = -l_0^2. \quad (16)$$

W równaniu (16) stała ma znak ujemny, gdyż $\frac{dl}{dr}$ jest ujemne. Rozwiązując równanie różniczkowe (16) otrzymamy

$$l' = \sqrt{1 - \frac{2}{\sigma a} (r^{\sigma a} - r_0^{\sigma a})}, \quad (17)$$

gdzie $l' = \frac{l}{l_0}$, zaś l_0 i r_0 długość oraz promień elektrody sterującej (rzeczywistej lub fikcyjnej), dla której naprężenia promieniowe osiągają minimum.

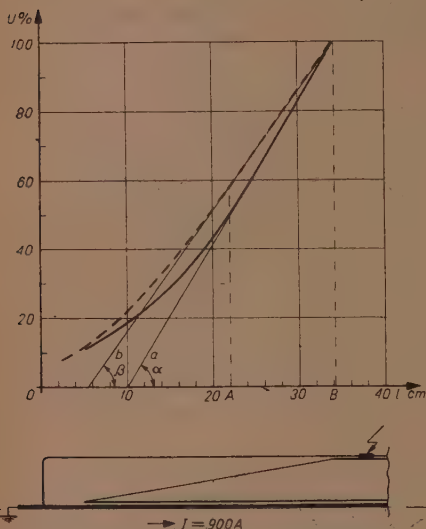
Mając dane długość i promień sworznia oraz okucia przepustu, z równania (17) można określić l_0 i r_0 , a tym samym funkcję $l=f(r)$. Jeżeli przyjęte założenia, dotyczące przede wszystkim rozkładu temperatur wewnątrz przepustu, odpowiadają rzeczywistości, to obliczony na podstawie równania (17) przepust będzie posiadał, przy określonym prądzie płynącym przez sworzeń, praktycznie jednostajny osiowy rozkład naprężeń.

5. POMIARY

W celu eksperymentalnego ustalenia wpływu zmian ϵ na rozkład pola elektrycznego dokonano pomiaru rozkładu napięcia na powierzchni przepustu nieobciążonego oraz obciążonego prądem o wysokości $1,2 I_{zn} = 900$ A. Do prób użyto przepustu transformatorowego o napięciu i prądzie znamionowym 60 kV, 750 A, obliczonego na jednostajny osiowy rozkład napięcia przy $\epsilon = \text{const}$. Rozkład pola zdejmowano w części napowietrznej przepustu metodą kompensacyjną, stosując elektronowy wskaźnik zerowy wykonany w Instytucie Elektrotechniki. Czułość układu pomiarowego, na którą składa się głównie czułość wskaźnika zerowego, czułość woltomierzy oraz wpływ przesunięcia kąтового napięcia przykładanego do sondy względem napięcia przykładanego do izolatora, oszacować można średnio na 1,5%. Przy pomiarach sworzeń izolatora uziemiono. W układzie tym obraz pola uległ odkształceniu w stosunku do obrazu występującego przy prawidłowym zainstalowaniu izolatora. W naszym przypadku nie ma to zasadniczego znaczenia, gdyż pomiary miały na celu w pierwszym rzędzie ustalenie jakościowego wpływu zmian ϵ na rozkład pola. Rozkład pola zdejmowano przy napięciu całkowitym przyłożonym do izolatora równym 30 kV. Sondę ustawiano wzdłuż przewidywanego przebiegu linii ekwipotencjalnych. Pomiar rozkładu pola na powierzchni przepustu obciążonego prądem dokonano po ustaleniu się temperatury powierzchni izolatora (temperatura sworznia $t_1 = 70^\circ \text{C}$, temperatura powierzchni izolatora $t_2 = 30^\circ \text{C}$). Wyniki pomiarów w postaci wykresów uwidocznione są na rys. 3. Wykresy przedstawiają rozkład

napięcia na powierzchni przepustu w funkcji długości części sterowanej. Dodatkowo zmierzono napięcie przeskoku przy częstotliwości sieciowej przepustu obciążonego prądem

900 A oraz nieobciążonego. Napięcie to wynosi dla przypadku pierwszego 167 kV, dla drugiego zaś — 184 kV.



Rys. 3. Rozkład napięć na powierzchni części napowietrznej przepustu transformatorowego 60kV,ysterowanego na jednostajny osiowy rozkład naprężeń przy $\varepsilon = \text{const.}$

- — — Rozkład napięcia, gdy przez sworznię prąd nie płynie.
- — — Rozkład napięcia, gdy przez sworznię płynie prąd 900 A.

wędzi elektrod sterujących. W naszym przypadku mieliśmy do czynienia z przepustem, którego część olejowa nie była oprofilowana (nieobtoczona), jednakże dla celów porównawczych można przyjąć, iż rozkład naprężeń na powierzchni przepustu odpowiada rozkładowi osiowemu. Wpływ zmiany ε na naprężenia osiowe i promieniowe wynika ze wzorów (10) i (15).

Przy pomiarze rozkładu pola głównym źródłem błędów było „odrocenie” układu, to znaczy uziemienie sworzni będącego normalnie w eksploatacji pod napięciem. Stąd rozkład pola na powierzchni i w otoczeniu przepustu odbiegał od rozkładu występującego w układzie prawidłowym. Ze względu na porównawczy charakter pomiarów błąd ten, jak również błąd wynikający z czułości układu może być pominięty. Zmieniony w stosunku do występującego w eksploatacji rozkład pola w otoczeniu przepustu nie wpływał praktycznie na rozkład pola wewnątrz przepustu ze względu na dużą różnicę przenikalności dielektrycznych powietrza i papieru bakelizowanego.

6. KRYTYKA POMIARÓW

Pomiary miały na celu wykazanie, iż przepływ prądu przez sworznię przepustu wywołuje pole temperaturowe, zmieniające rozkład ε w stopniu możliwym do wywołania zmiany rozkładu naprężeń elektrycznych w stosunku do rozkładu przy $\varepsilon = \text{const.}$ Jako miernik tych zmian przyjęto zmiany rozkładu pola elektrycznego na powierzchni przepustu. Ściśle biorąc rozkład naprężeń osiowy odpowiada rozkładowi na powierzchni przepustu w przypadku nieskończonej ilości elektrod oraz jeśli powierzchnia przepustu stanowi obwiednię kra-

7. WNIOSKI

Obliczenia i pomiary wykazują, iż w przepustach dla dużych prądów i wyższych napięć, wykonanych z papieru bakelizowanego, należy się liczyć ze zmianą rozkładu pola elektrycznego, wywołaną przepływem ciepła poprzez materiał izolacyjny od sworznia do otoczenia. Zakładając, iż na odcinku $A-B$ (rys. 3) zależność $U=f(l)$ dla przepustu z prądem i bez prądu jest liniowa, jako miernik maksymalnego osiowego gradientu napięcia można przyjąć nachylenie prostych a i b do osi l . W pierwszym przypadku $\operatorname{tg} a = 1,65$, w drugim zaś — $\operatorname{tg} b = 1,45$. Wzrost maksymalnych naprężeń osiowych wynosi więc około 14%, powodując przy tym obniżenie się napięcia przeskoku przy częstotliwości sieciowej o około 10%. Równocześnie zmieniają się napięcia na poszczególnych warstwach izolacyjnych, co może prowadzić do występowania zjawiska erozji [4] w zewnętrznych warstwach izolacyjnych, jeżeli rozkład ekranów ze względu na erozję został ustalony przy założeniu $\varepsilon = \text{const}$.

Idealnym rozwiązaniem byłoby zastosowanie takiej liczby ekranów, aby przy wszelkich możliwych w eksploatacji rozkładach ε , napięcia przypadające na poszczególne warstwy nie przekraczały dopuszczalnych. Rozwiązania takie, szczególnie dla wyższych napięć znamionowych, prowadzą do bardzo dużej liczby ekranów, co podraża koszt przepustu. W przypadkach więc, w których można przewidzieć najbardziej prawdopodobne długotrwałe obciążenie prądowe, wydaje się celowe obliczanie przepustu dla tego przypadku.

Przepusty obliczone na jednostajny osiowy rozkład naprężeń przy stałym ε wykazują zmniejszoną wytrzymałość na przeskok przy napięciu o częstotliwości sieciowej, gdy przez sworzeń płyną większe prądy. W takich rozwiązaniach jako miarodajną wytrzymałość na przeskok należy uważać wytrzymałość przy przepływie przez sworzeń izolatora prądu roboczego.

Uwzględniając rachunkowo wpływ zmiany ε na rozkład pola elektrycznego przyjęto, iż rozkład temperaturowy wewnątrz przepustu narzucony jest wyłącznie przez przepływ ciepła od sworznia do otoczenia. Założenie to może nie odpowiadać rzeczywistości dla izolatorów zagrożonych przebiegiem cieplnym, gdzie straty dielektryczne powodują wzrost temperatury izolacji do granic wytrzymałości termicznej. Dla tych przypadków podane metody rachunkowe należy traktować jako przybliżone. Wymagają one eksperymentalnego sprawdzenia.

WYKAZ LITERATURY

1. Humburg K. — Die Berechnung von Kondensatordurchführungen. Arch. f. Elektrot. 1923, s. 526.
2. Imhof A. — Beitrag zur technischen Berechnung von Kondensatordurchführungen. Bul. SEV 1926, s. 686.
3. Kappeler H. — Progrès réalisé dans la construction des isolateurs de traversée à condensateurs. C. I. G. R. E. rap. 208, 1946.
4. Roth A. — Hochspannungstechnik. 1950, s. 7.

Г. ГЗЫЛЕВСКИ

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КОНДЕНСАТОРНЫХ ВВОДАХ

Резюме

Для уменьшения радиальных и аксиальных напряжений в конденсаторных вводах, в изоляционном материале этих последних введены проводящие электроды — экраны. Расположение экранов подбирается таким образом, чтобы аксиальные напряженности вдоль оси ввода практически оставались постоянными. Существующие расчётные методы позволяют определить длины и радиусы отдельных экранов для равномерного аксиального распределения напряженностей в предположении, с этим однако условием, что диэлектрическая проницаемость материала ϵ остаётся постоянной.

В конструкциях для больших токов (ряда 1000 а) и для высоких напряжений (60—120 кв) внутри вводов возникают значительные температурные градиенты, вызываемые течением выделяемой в стержне теплоты — от стержня к окружающей среде. Эти градиенты вызывают изменение ϵ вдоль радиуса ввода. Лабораторные исследования показали, что это изменение влияет на распределение электрического поля на поверхности ввода, вызывая также снижение разрядных напряжений при частоте сети. Для исследований был применён трансформаторный ввод на 60 кв, рассчитанный на равномерное аксиальное распределение напряженностей при $\epsilon = \text{const}$.

Изменение напряженностей по отношению к напряженностям при $\epsilon = \text{const}$, косвенно вызванное течением тока через стержень, может также влиять на преждевременную эрозию. Автор пытается определить по расчёту влияние изменения ϵ на распределение электрического поля во вводе на большие токи без конденсаторных экранов, рассматривая распределение радиальных напряженностей. Предполагая, что выделяемая в стержне теплота полностью протекает через изоляционный материал и является единственным фактором распределения температуры внутри ввода (теплота вследствие диэлектрических потерь — значительно меньше), мы можем рассчитать распределение напряженностей по следующей формуле

$$K_r = \frac{U \cdot \sigma \cdot a \cdot r^{\sigma a - 1}}{r_2^{\sigma a} - r_1^{\sigma a}} \quad \text{кВ. см} \quad (1)$$

где U — напряжение в кв приложенное к вводу

r_2 и r_1 — внешний и внутренний радиусы ввода в см,

σ — показатель возрастания ϵ в зависимости от температуры, причём $\epsilon_r = \epsilon_0 e^{\sigma \cdot t}$

$a = \frac{P}{2\pi\lambda}$, где P — выделяемая в стержне (на 1 см его длины) — мощность в ваттах,

λ — теплопроводимость изоляционного материала в ваттах, см/см² °C.

Из формулы (1) следует что при возрастании тока, проникающего через стержень (σa — стремится к единице) распределение радиальных напряженностей приближается к равномерному, и система приближается к плоской. При $\sigma a > 1$ напряженности в окружающей стержень среде будут меньше напряженности в наружных слоях.

Случай этот мало вероятен, ибо σa всегда меньше единицы, однако при значительной нагрузке стержня током — распределение поля может подлежать изменениям.

Основываясь на теории расчёта конденсаторных вводов Гумбурга мы также учли влияние изменений ϵ во вводах с равномерным аксиальным распределением напряженностей.

Принимая положения Гумбурга и положение относительно распределения вдоль радиуса как во вводе без конденсаторных экранов, ввод с экранами будет иметь практически равномерное распределение аксиальных напряженностей, если отдельные выравнивающие экраны удовлетворяют условию:

$$l' = \sqrt{1 - \frac{2}{\sigma a} (r^{\sigma a} - r_0^{\sigma a})} \quad (2)$$

где $l' = l/l_0$ а l_0 — длина действительного или воображаемого экрана и r_0 — радиус, для которого радиальные напряженности достигают минимума.

Исполненные измерения показали, что изменение распределения поля, вызванное течением тока через стержень конденсаторного ввода рассчитанного на равномерное аксиальное распределение напряженностей при $\epsilon = \text{const}$, снижает разрядное напряжение при частоте сети приблизительно на 10%. Отсюда следует, что в таких случаях эффективной разрядной прочностью следует считать прочность при течении рабочего тока через стержень изолятора. Здесь тоже могут появляться чрезмерные напряжения на внешних изоляционных слоях, что может вызвать преждевременную эрозию.

Исполненные исследования и расчёты автор считает предварительными. В особенности следует проверить положения относящиеся к распределению ϵ вдоль радиуса. В некоторых случаях может оказаться, что коэффициентом диэлектрических потерь нельзя пренебрегать, в особенности во вводах, которым угрожает тепловой пробой.

Следует также исследовать влияние изменений распределения ϵ на импульсную прочность.

J. GZYLEWSKI

THE INFLUENCE OF THE DIELECTRIC PERMEABILITY CHANGE ON THE ELECTRIC FIELD DISTRIBUTION IN CONDENSER BUSHINGS

Summary

In order to reduce longitudinal and radial stresses condenser bushings contain in their insulation conducting electrodes — screens. The screen distribution generally is chosen in such a way, that the longitudinal stresses are practically uniform along the bushing axis. The existing methods of calculations allow to determine the length

and radius of each screen for a distribution at uniform axial stress, assuming however that the dielectric permeability ϵ is constant.

In a construction for great currents (of an order of 1000 A) and voltages (60 and 110 kV) considerable temperature gradients arise inside the bushing caused by the heat generated in the rod and passing from the rod to the surrounding atmosphere. These gradients cause the change of ϵ along the bushing radius. It has been shown by laboratory research that this change influences the electric field distribution on the bushing surface, and also causes a reduction of the line frequency flash-over voltage. A 60 kV transformer bushing with a uniform longitudinal stress distribution with $\epsilon = \text{const}$ was used for research purposes.

The stress change in relation to stresses at $\epsilon = \text{const}$, indirectly caused by the current flow through the rod, may also produce an early erosion. The author undertakes to define by calculation the influence of a change of ϵ on the electric field distribution in the bushing not designed for large currents and considers the radial stress distribution.

Assuming that the heat generated in the rod flows entirely through the insulation and is the sole factor determining the temperature distribution inside the bushing (the heat caused by the dielectric losses is considerably lower) the stress distribution may be calculated from the formula:

$$K_r = \frac{U \cdot \sigma \cdot a \cdot r^{\sigma a - 1}}{r_2^{\sigma a} - r_1^{\sigma a}} \text{ kV/cm} \quad (1)$$

where U — voltage in kV applied to the bushing,

r_2 and r_1 — the outside and inside bushing radii in cm,

σ — the exponent of ϵ growth with temperature assuming $\epsilon_r \epsilon_0 e^{\sigma \Delta}$,

$a = \frac{P}{2\pi\lambda}$ — where P — power in W (generated in 1 cm running of the rod).

λ — thermal conductivity of the insulation material, W. cm/cm² op.

From the formula (1) it follows that with the growth of the current flowing through the rod (σa approaches unity) the radial stress distribution gets more uniform — the circuit approaches to a flat characteristic. At $\sigma a > 1$ the stresses around the rod will be lower than those in the external layers. Such case is not very probable, because practically always $\sigma a < 1$; at a great current loading of the rod however, the field distribution may be changed.

On the basis of Humburg's condenser calculation method the influence of the ϵ changes in the bushings with uniform axial stress distribution was also considered.

Accepting Humburg's assumption and the assumption concerning the distribution along the radius as in the bushing not designed for a proper field distribution, a well designed bushing will have a practically uniform axial stress distribution, if each screen fulfills the condition.

$$l' = \sqrt{1 - \frac{2}{\sigma a} (r^{\sigma a} - r_0^{\sigma a})} \quad (2)$$

where $l' = l/l_0$, l_0 and r_0 being the length and the radius of one electrode respectively.

Measurements have shown that the change of the field distribution caused by the current flowing through the rod of the condenser bushing designed for a uniform axial stress distribution at $\epsilon = \text{const}$ reduces the flash-over voltage at line frequency by about 10%.

It follows, that in such cases it is adequate to assume the dielectric strength at the normal load-current as the normal flashover dielectric strength. There may also arise excessive voltages on the external insulating layers, which may too early stimulate erosion.

The author considers the research and calculations completed to date as preliminary. In particular the assumptions relating to the ϵ distribution along the radius should be confirmed. In certain cases the dielectric losses cannot be neglected particularly in the bushings exposed to thermal punctures.

The influence of the ϵ distribution changes upon the impulse strength should also be tested.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
ZAKŁAD ELEKTRONIKI

Komunikaty
z prac referowanych na zebraniu sprawozdawczym IPPT
w dniu 17. 2. 1955.

621.314.7:669.783

LOKALNE TRAWIENIE ELEKTROLITYCZNE GERMANU

Z. MAJEWSKI i J. KLAMKA

Omówiono otrzymywanie małych wnęk w płytkach germanowych metodą trawienia elektrolitycznego. Zastosowanie tej metody umożliwia dokonanie postępu w dziedzinie technologii krajowych przyrządów półprzewodnikowych. Podano dwa warianty metody: tzw. trawienie luźne oraz trawienie z dociskiem.

Местное электролитическое травление германия

Оговорен способ получения небольших углублений в германиевых пластинках методом электролитического травления. Применение этого метода позволяет на успех в области технологии полупроводниковых приборов. Указаны два варианта этого метода: т. наз. свободное травление и травление с нажимом.

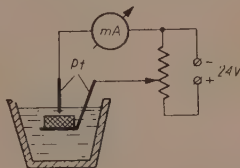
Electrolytic spot etching of germanium

The method of obtaining small cavities in germanium plates by applying electrolytic etching permits a progress in the manufacturing of semiconducting devices. Two modifications of the said method are given: etching with and without pressure.

Celem pracy było opanowanie metody lokalnego trawienia germanu, umożliwiającej otrzymywanie na płytkach germanowych obszarów o bardzo małej grubości, przydatnych w technologii tranzystorów i diod krystalicznych.

Poddano próbom dwie metody: metodę trawienia luźnego oraz metodę trawienia z dociskiem. Schemat urządzenia do trawienia luźnego przedstawiono na rys. 1. Anodą jest trawiona płytka germanowa, katodą — drut platynowy. Obydwie elektrody są przylutowane cyną do doprowadzeń miedzianych, przy czym miejsca lutowania oraz części doprowadzeń zanurzone w elektrolicie są pokryte zabezpieczającą substancją smołową (piceliną). Trawiono płytki germanowe o grubości $0,3 \div 1$ mm. Średnica drutu pla-

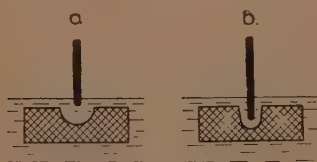
tynowego wynosiła $0,1 \div 0,6$ mm, przy czym koniec drutu był łagodnie zaostroszony. Elektrolizę przeprowadzano w naczyniu z chlorku polwinyłu. Elektrolit



Rys. 1

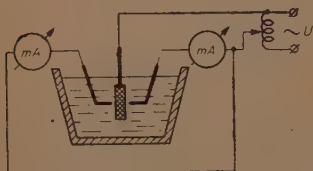
stanowi mieszanina kwasów fluorowodorowego i azotowego. Skład elektrolitu został tak dobrany, ażeby trawienie germanu przez elektrolit w danej temperaturze bez przepływu prądu zachodziło

powoli w stosunku do trawienia wnęki po włączeniu prądu. Optymalny skład mieszaniny w temperaturze pokojowej wynosi: 1 część stężonego kwasu fluorowodorowego na 5 części stężonego kwasu azotowego (objętościowo). Warunki elektryczne procesu zostały dobrane w taki sposób, ażeby zbyt gwałtowny przebieg elektrolizy nie wywoływał takiego nagrzewania elektrolitu, które uniemożliwiłoby utrzymywanie jego stałej temperatury za pomocą chłodzenia naczynia wodą. Podwyższenie temperatury elektrolitu podczas procesu powoduje zbyt szybkie trawienie całej powierzchni germanu niezależnie od przepływu prądu. Najkorzystniejsze natężenie prądu wynosiło około 100 mA. Stwierdzono, że proces przebiega prawidłowo również przy prądzie zmiennym, przy czym nie występują tu zjawiska polaryzacyjne oraz w mniejszym stopniu występują zakłócające działanie gazowania elektrolitu. Trawiona wnęka ma kształt kulistej czasy, której średnica zwiększa się z czasem trawienia (rys. 2a).



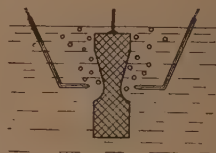
Rys. 2

Przesuwanie elektrody platynowej ruchem ciągłym w ten sposób, aby odległość pomiędzy ostrzem i germanem była stała, powoduje zmianę kształtu trawionej wnęki, jak to przedstawiono na rys. 2b. Podaną metodą trawiono również



Rys. 3

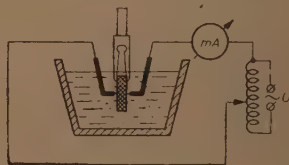
płytki germanowe dwustronnie w układzie przedstawionym schematycznie na rys. 3. Przy położeniu pionowym trawionej płytki występują jednak trudności, związane z zakłócającym działaniem pęcherzyków gazu wydzielanego podczas elektrolizy; wskutek tego działania otrzymuje się wnęki o kształcie asymetrycznym (rys. 4).



Rys. 4

Metodę powyższą nazwano procesem trawienia luźnego w celu podkreślenia faktu, że elektrody znajdują się względem siebie w pewnej niewielkiej odległości. Proces trawienia luźnego odznacza się szeregiem wad w stosunku do zastosowanego następnie procesu trawienia z dociskiem.

Zasadniczą zmianę stanowi tu okoliczność, że dwie elektrody platynowe, przyłożone ściśle współosiowo do dwóch przeciwnych powierzchni płytki germanowej, są do niej stałe dociskane za pomocą słabej sprężynki. Trawiona płytka nie jest połączona ze źródłem napięcia.

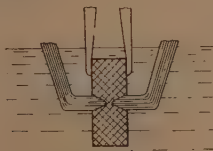


Rys. 5

Napięcie zmienne jest doprowadzone do obu elektrod platynowych w sposób przedstawiony na rys. 5.

Przy tym procesie udało się z powodzeniem zastosować 50% roztwór wodny elektrolitu stosowanego w metodzie

trawienia luźnego. Warunki elektryczne są takie same jak poprzednio. Kształt wnęk trawionych odpowiada kształtowi zastosowanych elektrod. (Rys. 6). Prędkość trawienia jest nieco większa niż poprzednio i wynosi w przybliżeniu $0,02 \div 0,1$ mm na minutę.



Rys. 6

Zalety metody trawienia z dociskiem są następujące:

1. możliwość otrzymania ściśle określonego kształtu trawionej wnęki w

zależności od kształtu zastosowanych elektrod;

2. łatwość umocowania trawionej płytki germanowej, do której nie potrzeba doprowadzać napięcia;

3. znacznie słabsze trawienie bezprądowe całej powierzchni germanu wskutek zastosowania słabszego elektrolitu, co umożliwia w efekcie użycie cieńszych płytek germanowych;

4. znacznie słabsze gazowanie elektrolitu;

5. wyeliminowanie chłodzenia elektrolitu, ze względu na bardzo nieznaczne jego ogrzewanie się podczas elektrolizy;

6. łatwość opracowania kontroli głębokości trawionych wnęk.

621.314.7

DOŚWIADCZALNE TRANZYATORY PUNKTOWE MODEL TP

W. ROSINSKI i J. GROSZKOWSKI

Omówiono wyniki badań przeprowadzonych na dwóch seriach prototypowych tranzystorów punktowych. Pierwsza część komunikatu omawia zagadnienie trwałości tych tranzystorów, druga zaś — rozrzut ich parametrów elektrycznych. Podkreślono wpływ formowania styków na parametry tranzystora.

Опытные кристаллические триоды модели TP

Оговорены результаты исследований двух серий прототипных точечных кристаллических триодов. В первой части сего сообщения оговорен вопрос прочности этих триодов, во второй же — разброс их электрических параметров. Подчеркнуто влияние формования контактов на параметры триода.

Experimental point-transistors, model TP

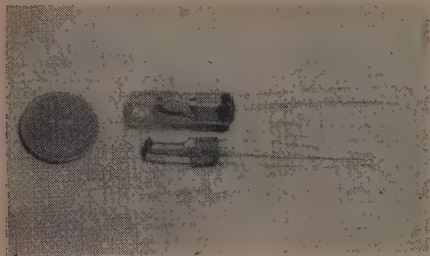
Results of experiments with two series of prototype point transistors are given. The first part of the paper deals with the reliability of these transistors, whereas the second one with their electric parameters. The influence of forming of the contacts upon transistor parameters is emphasized.

W grudniu 1953 r. wykonano w Zakładzie Elektroniki IPPT-PAN pierwszy model TP-1 tranzystora punktowego (rys. 1). Wykonanie następnych 250 sztuk serii prototypowej dostarczyło wiele wiadomości odnośnie do technologii oprawki i procesów technologicznych, którym poddaje się tranzystor przed oddaniem go do użytku. Są to: formowanie elektryczne, utrwalenie styku i szczelne zamknięcie

tranzystora. Pierwsze dwa procesy mają na celu ustabilizowanie elektryczne i mechaniczne tranzystora. Doświadczenia serii prototypowej zostały uwzględnione w następnych seriach.

Utrwalenie styku za pomocą odpowiedniej masy o możliwie małym skurczu, dobrze przylegającej i obojętnej chemicznie ma pierwszorzędne znaczenie nie tylko ze względu na stabilizację mecha-

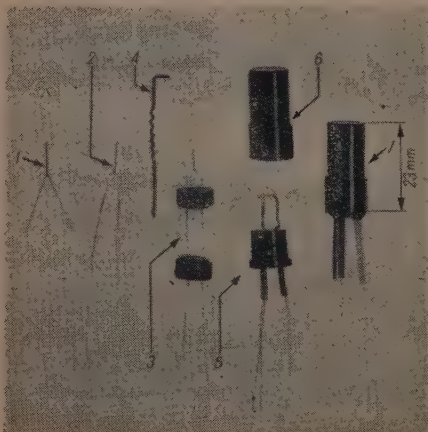
niczną, lecz także ze względu na zabezpieczenie od szkodliwego wpływu pary wodnej [1]. W związku z tym przebadano szereg materiałów, które z jednej strony



Rys. 1

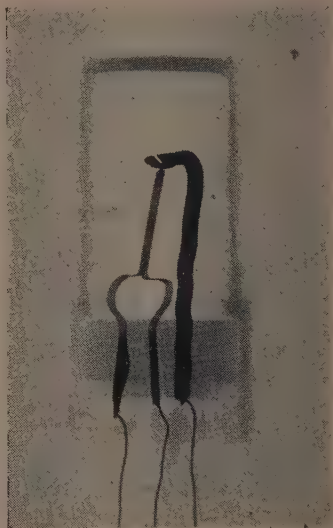
zapewniałyby dostatecznie szczelne zamknięcie tranzystora, z drugiej zaś strony nie działały chemicznie na części składowe tranzystora i miały możliwie mały skurcz. To zadanie spełniła zadowalająco mieszanina zalewna, złożona w równych częściach z wosku pszczelego i kalafonii.

Zdjęcia na rys. 2a i 2b ilustrują konstrukcję tranzystora oraz sposób utrwalenia styku i szczelnego zamknięcia tranzystorów typu TP-2 i TP-3. Na rys. 2a. przedstawiono tranzystor punktowy TP-2 i TP-3, na którym: 1. elektrody po skle-



Rys. 2a

jeniu, 2. elektrody przygotowane do montażu, 3. elektrody wmontowane w korek, 4. trzymak z nalutowaną płytką germanową, 5. tranzystor po zestawieniu, 6. przykrywka, 7. tranzystor zamknięty po impregnacji. Na rys. 2b przedstawiono zdjęcie rentgenowskie tranzystora.

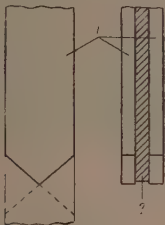


Rys. 2b

Cechą szczególną tranzystorów punktowych opracowanych przez Zakład Elektroniki jest sposób wykonania elektrod według patentu nr 37 802¹ zapewniający stałość odległości wzajemnej elektrod, co znakomicie ułatwia montaż i stwarza warunki niezbędne dla produkcji tranzystorów o małym rozrzucie parametrów elektrycznych. Konstrukcja ta (rys. 3) polega na ścisłym ustaleniu odległości przez wykonanie elektrod w postaci wąskich pasków z cienkiej folii metalowej 1, sklejonych wzajemnie w danej odległości, która jest określona grubością przekładki lub kleju 2. Sklejony zespół poddaje się dwukrotnemu obcięciu w sposób, który pozwala na otrzymanie jednakowej długości ostrzy obu elektrod.

¹ J. Groszkowski — Konstrukcja tranzystora punktowego, Patent P.R.L. Nr 37802.

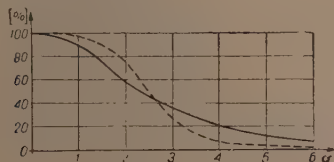
Trwałość tranzystorów serii prototypowej była stosunkowo mała: odpad w ciągu pierwszych 360÷450 godzin wynosił około 50%. Przyczyny były rozmaite i odpowiadają klasyfikacji wprowadzonej



Rys. 3

przez innych autorów [1]. Dalsze 25% tranzystorów odpadło po upływie około 1000 godzin, a trwałość pozostałych 25% przekroczyła już 2400 godz. Zastosowanie wyżej wspomnianej mieszaniny zalewnej oraz opracowanie procesu utrwalania styku zapewniło lepszą szczelność tranzystorów i mechaniczną ich stabilność, co w rezultacie dało, zmniejszenie odpadu. Obecnie odpad w ciągu pierwszych 400 godzin nie przekracza 5%. Mimo, że w chwili obecnej brak jeszcze ściślejszych danych, wszystko wydaje się wskazywać, że trwałość ostatniej serii 300 sztuk powinna przekroczyć kilka tysięcy godzin.

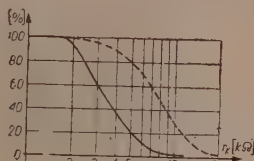
Dotychczasowe doświadczenia wskazują, że trwałość zależy w znacznej mierze od wartości prądu emitera. Zbyt duża jego wartość wywołuje zwarcie kolektora z emiterem wskutek nadmiernego wzrostu przewodności powierzchniowej pod wpływem znajdującej się na powierzchni pary wodnej [1].



Rys. 4

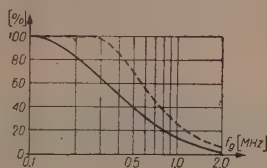
Pomiary parametrów elektrycznych (wykonane na 250 sztukach serii proto-

typowej) wykazały bardzo znaczny ich rozrzut. Wyniki tych pomiarów przedstawiono na rys. 4, 5 i 6 (krzywa ciągła). Na rys. 4 przedstawiono zależność procentowej ilości tranzystorów o danej wartości współczynnika wzmocnienia prądowego od wartości tego współczynnika; rys. 5 przedstawia zależność procentowej



Rys. 5

ilości tranzystorów o danej wartości oporności wyjściowej r_k od wartości tej oporności, a rys. 6 — zależność ilości tran-



Rys. 6

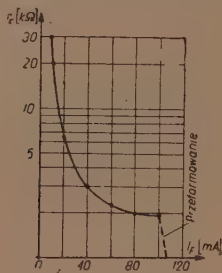
zystorów o danej wartości częstotliwości granicznej od wartości tejże częstotliwości.

Dalszy materiał doświadczalny dla 130 tranzystorów z wykonywanej serii 300 sztuk przedstawiono na rys. 4, 5 i 6 (krzywa przerywana).

Porównanie wyników wskazuje na znacznie mniejszy rozrzut parametrów w przypadku serii 300 tranzystorów, wykonywanej w oparciu o doświadczenia uzyskane przy produkcji serii prototypowej. Poprawę wyników osiągnięto dzięki:

- starannej selekcji odległości ostrzy przeprowadzanej mikroskopem, co szczególnie wyraźnie uwypukla przebieg krzywej częstotliwości granicznej,
- ulepszonej metodzie elektrycznego formowania, co zapewnia dużą równomierność współczynnika α .

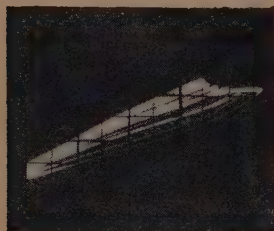
Formowanie elektryczne [2], [3] jest procesem technologicznym, który w sposób decydujący wpływa na wartości elektrycznych parametrów tranzystora. Wykres oporności kolektora w zależności od prądu formowania przedstawiony na rys. 7 oraz fotografie charakterystyk



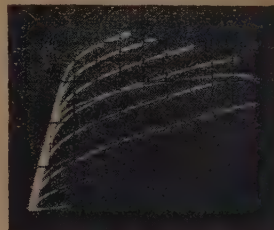
Rys. 7

tranzystora (rys. 8a i b) przed formowaniem (a) i po formowaniu prądem 100

a.



Rys. 8a



Rys. 8b

mA (b) podkreślają wpływ tego procesu na elektryczne właściwości tranzystora. Dobra znajomość procesu formowania umożliwia produkcję tranzystorów o zadanych charakterystykach. W związku z tym zostały rozpoczęte pewne prace podstawowe mające na celu dokładne opisanie metod formowania. Niektóre wyniki osiągnięte w toku wykonywania tych prac są przedmiotem innych komunikatów.

Literatura

- [1] Ryder R. M., Sittner W. R. — Transistor reliability studies. PIRE 42, Feb. 1945, s. 414—419.
- [2] Slade B. — Factors in the design of point contact transistors. RCA Rev. T. 14, Nr 1, 1953, s. 17.
- [3] Slade B. — A high performance transistor with wide spacing between contacts. RCA Rev. T. 11, Nr 4, 1950, s. 517.

WPLYW FORMOWANIA NA CZĘSTOTLIWOŚĆ GRANICZNĄ TRANZYSTORA PUNKTOWEGO

W. ROSINSKI, J. PUŁTORAK

Po omówieniu przyczyn rozrzutu częstotliwości granicznej tranzystorów punktowych serii prototypowych oraz sposobów formowania tranzystora podano wyniki pomiarów ilustrujące wpływ warunków formowania styku na częstotliwość graniczną.

Влияние формирования на предельную частоту точечного кристаллического триода

После оговора причин разброса предельной частоты точечных кристаллических триодов прототипных серий, а также способов формирования триодов—поданы результаты измерений, которые освещают влияние условий формирования контактов триода на предельную частоту.

The influence of forming upon the α cut-off frequency of point transistors

Having dealt with the causes of dispersion of the α cut-off frequency in point transistors of the prototype series as well as with the methods of their forming, measuring results are given which illustrate the influence of the contact forming conditions upon the α cut-off frequency.

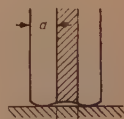
Proces elektrycznego formowania wpływa decydująco na takie zasadnicze parametry elektryczne tranzystora [3], [4], [6], jak częstotliwość graniczna f_{gr} , współczynnik wzmocnienia prądowego α i oporność wyjściowa r_k . Analiza wpływu formowania na częstotliwość graniczną jest przedmiotem niniejszego komunikatu (częstotliwością graniczną tranzystora nazywa się taką częstotliwość, przy której α maleje o 3dB w stosunku do wartości α_0 przy małych częstotliwościach).

Pomiary przeprowadzone na 250 tranzystorach serii prototypowej TP-1 oraz 130 tranzystorach z serii 300 sztuk wskazują na znaczny rozrzut wartości częstotliwości granicznej, mimo że odległości między punktami styku elektrod były bardzo podobne. Większy rozrzut w serii prototypowej tłumaczy się przede wszystkim niedostateczną kontrolą odległości elektrod punktowych, która mogła wynosić od 40 do 70 μ w stosunku do wartości 50 do 60 μ utrzymywanej w tranzystorach dalszej serii.

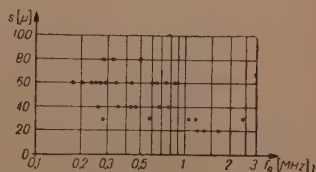
Następnym źródłem rozrzutu jest okoliczność, iż elektrody punktowe nie przy-

legają do germanu całą powierzchnią styku, lecz tylko jego częścią (rys. 1).

Przy grubości ostrza d , współmiernej z odległością elektrod s , odległości punktów styku w poszczególnych sztukach mogą się znacznie różnić, co bez względu na sposób formowania wywołuje zwiększenie rozrzutu odnośnie do f_{gr} . Próby przeprowadzone z szeregiem elektrod o odległościach s od 20 do 80 μ przy grubościach elektrod $d=60\mu$ potwierdziły to przewidywanie. Rozrzut częstotliwości granicznych tranzystorów w funkcji odległości ostrzy przedstawiono na rys. 2. Formowa-



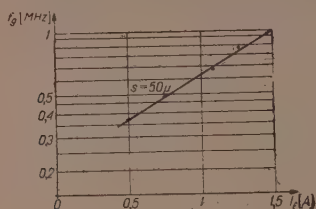
Rys. 1



Rys. 2

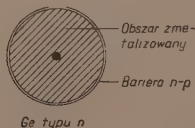
nie zwiększa na ogół częstotliwość graniczną tranzystora (rys. 3) ze względu na

styku kolektora wolframowego w kierunku przewodzenia; b. przedstawia po-



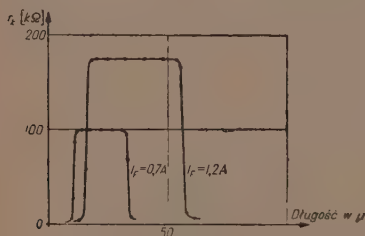
Rys. 3

to, że wytworzona przez formowanie bariery n - p ulega przesunięciu ku elektrodzie nieformowanej (emitera), zmniejszając tym samym długość drogi nośników mniejszościowych, wzdłuż której ulegają one stosunkowo powolnej dyfuzji. Obszar formowany między ostrzem kolektora i barierą n - p (rys. 4) ma bardzo dużą



Rys. 4

przewodność i zachowuje się jak metal. Przykład ilustrujący zmiany zachodzące dookoła styku formowanego podano na rys. 4. Rozkład oporności [1], [7] dookoła styku formowanego, zmierzony między zmetalizowaną bazą i punktami obszaru formowanego, ma przebieg przedstawiony na rys. 5. Typowy wygląd obszaru formo-



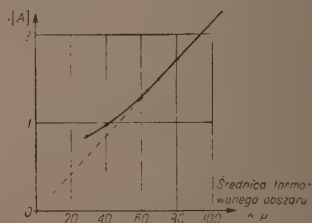
Rys. 5

wanego ilustruje rys. 6., na którym a. przedstawia zmiany po uformowaniu



Rys. 6

wierzchnię przeformowaną przy użyciu elektrod fosforbrązowych; c. przedstawia fragment powierzchni odpowiadający dobrze uformowanemu tranzystorowi o elektrodach fosforbrązowych. Krańcowe jasne punkty odpowiadają stykom elektrod. Strzałka pokazuje ścieżkę uformowaną między kolektorem (lewy punkt) a emitrem. Wzrost prądu formowania wywołuje zwiększenie obszaru formowanego (rys. 7), co w zupełności wyjaśnia wyniki przedstawione na rys. 3. Formowanie polega

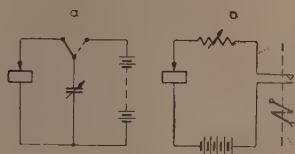


Rys. 7

na lokalnym nagrzaniu germanu dookoła miejsca styku, czemu towarzyszy dyfuzja lub elektroliza metalu ostrza w głąb germanu. W związku z tym procesem zachodzi przemiana germanu n na german typu p i utworzenie bariery p - n [1], [7].

Istnieje kilka sposobów formowania elektrycznego; jeden z nich polega na roz-

ładowaniu naładowanego kondensatora w obwodzie „elektroda punktowa — german” (rys. 8a), inny na przepuszczaniu

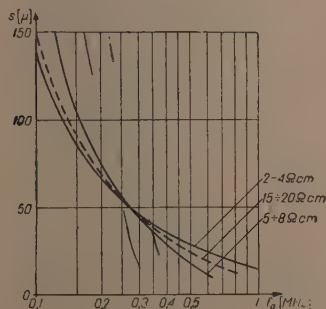


Rys. 8

prądu o stałej wartości w obwodzie (rys. 8b) w ciągu czasu 0,1 do 2 sec. kontrolowanego na przykład za pomocą odpowiedniego przełącznika. W tym ostatnim przypadku może to być impuls pojedynczy lub też ciąg impulsów.

Proces formowania może ulec jeszcze dalszemu zróżnicowaniu [2] ze względu na to, że prąd formowania może być przepuszczany bądź w kierunku przewodzenia (wynosi on wtedy 0,5 do 2 A), bądź w kierunku wstecznym (wynosi wtedy przeciętnie 60 do 100 mA).

Powyższe sposoby formowania zostały zbadane ze względu na uzyskanie jak największych częstotliwości granicznych. Aby ocenić wpływ formowania na częstotliwość graniczną, zdjęto zależność $f_g = F(s)$ dla tranzystora nieformowanego (s oznacza tu odległość wzajemną ostrzy). Pomiary wykonano dla trzech rodzajów germanu typu n o oporności właściwej około 2 do 4 Ω cm, 5 do 8 Ω cm, i 15 do 20 Ω cm. Wyniki przedstawione na rys. 9



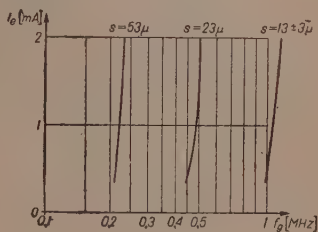
Rys. 9

potwierdzają małą zależność f_g od oporności właściwej materiału [5]. Dalsze pomiary, wykonane na germanie o oporności $\rho = 2$ do 4 Ω cm. Obszar formowany badano za pomocą mikromanipulatora (rys. 10).



Rys. 10

Zbadano również wpływ prądu emitera na częstotliwość graniczną przy różnych odległościach elektrod punktowych oraz przy stałej odległości, lecz przy zmiennym prądzie formowania. Rys. 11 przed-

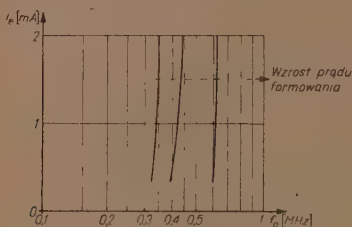


Rys. 11

stawia zależność częstotliwości granicznej od prądu emitera przy różnych odległościach s między stykami elektrod, a rys. 12 — zależności zdjęte przy różnych etapach formowania. Otrzymane wyniki wskazują na małą zależność f_g od prądu emitera I_e .

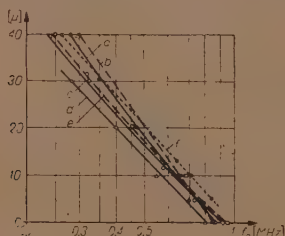
Formowanie styku kolektora w kierunku przewodzenia za pomocą pojedynczego impulsu prostokątnego wykonano w następujących warunkach: ostrze wolframowe (druć wolframowy $\varnothing = 0,1$ mm ostrzony elektrolitycznie), prąd formowa-

nia zmieniany w granicach 0,7 do 2,5 A, czas trwania impulsu 1 sec, napięcie na styku w czasie formowania około 10 do 12 V. Obszar w ten sposób formowany



Rys. 12

ma kształt pokazany na rys. 4 i 6. Obszar wewnętrzny ma dużą przewodność, a przesuwanie ostrza wewnątrz tego obszaru (w granicach błędów pomiaru) zupełnie nie wpływa na parametry tranzystora, a więc i na częstotliwość graniczną (rys. 13) niezależnie od prądu formowania. Odległości (rys. 13) są liczone

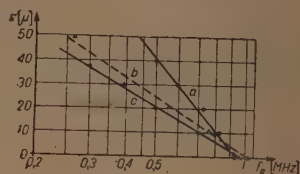


	Średn. obszar formowanego	Położenie elektroda
a	55μ	
b	55μ	
c	25μ	
d	25μ	
e	100μ	
f	100μ	

Rys. 13

między ostrzem nieformowanym i barierą n-p wytworzoną w czasie formowania. Szerokość bariery wynosi od 2 do 4,10⁻⁴ cm. Na rys. 13 przedstawiono zależność częstotliwości granicznej w funkcji odległości emitera od bariery n-p kolektora przy różnym ustawieniu kolektora w obszarze uformowanym.

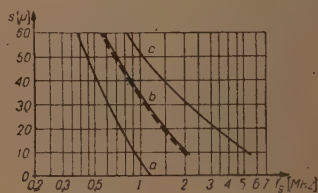
Formowanie tranzystora w tym samym kierunku za pomocą impulsów prostokątnych o czasie trwania krótszym niż 0,1 sec, za pomocą impulsów otrzymywanych przez wyładowanie kondensatora w obwodzie (rys. 8a) nie podwyższa maksymalnej częstotliwości granicznej, lecz jedynie zmienia wyraźnie nachylenie krzywej $f_g = F(s)$. Zależność częstotliwości granicznej od odległości emitera od bariery n-p kolektora przy różnych sposobach formowania podano na rys. 14,



Rys. 14

gdzie a. formowanie krótkimi impulsami o zmiennej amplitudzie, b. formowanie przez wyładowanie kondensatora 320 μF (napięcie ładowania 20 V), c. formowanie za pomocą impulsów długich ($t=1$ sec).

Następnie przeprowadzono formowanie w kierunku wstecznym, używając na kolektor ostrza fosfor-brązowego i formując w tym samym obwodzie. Obszary formowane były znacznie mniejsze, co nastręczało trudności wyznaczenia położenia bariery. Zależność f_g od s , otrzymaną przy impulsach o długości 1 do 2 sec, przedstawiono za pomocą krzywej a na rys. 15. Po skróceniu impulsu do czasu



Rys. 15

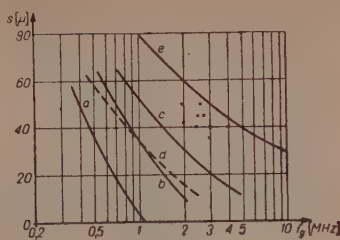
poniżej 0,1 sec nastąpiło dość znaczne zwiększenie częstotliwości granicznej (krzywa b).

Formowanie styku przez wyładowanie kondensatora o pojemności 0,03 μF łado-

wanego przy napięciu od 100 V do 250 V dało wyniki przedstawione na rys. 15 linią przerywaną.

Zbadano również formowanie styku przez przyłożenie napięcia formującego między ostrza emitera i kolektora przy odłączonej bazie; kierunek napięcia był taki, aby emiter był spolaryzowany w kierunku przewodzenia. Ten sposób formowania dawał zmianę kształtu obszaru formowanego z kołowego na podłużny. W czasie formowania stosowano krótkie impulsy prostokątne o czasie trwania poniżej 0,1 sec oraz impulsy powstające przy wyładowaniu kondensatora. Wyniki pomiarów odpowiadają krzywej c na rys. 15.

W celu lepszego porównania różnych sposobów formowania otrzymane wyniki zestawiono z krzywą e_g podaną przez Slade'a [5] (rys. 16) oraz naniesiono szeregi punktów oznaczonych krzyżykami, które odpowiadają najwyższymi częstotliwościami granicznym uzyskanym na tranzystorach Zakładu Elektroniki. Dalsze badania, mające na celu wyjaśnienie zaobserwowanych różnic, są w toku. Na rys. 16 uwidoczniono krzywe, które przedstawiają: a. formowanie długimi impulsami i bez formowania, b. formowanie krótkimi impulsami, c. formowanie krótkimi impulsami między elektrodami kolektor-emiter, d. formowanie



Rys. 16

długimi impulsami między elektrodami kolektor-emiter, e. krzywa podana przez Slade'a.

Literatura

- [1] Reiner Thedieck. — Über die Formierung von Germanium Oberflächen. Zeitschrift für angew. Physik Vol. B. Nr 5, 1953.
- [2] Shockley W. — Electrons and holes in semiconductors. Van Nostrand, New York 1950, s. 140.
- [3] Slade B. — A high performance transistor with wide spacing between contacts. RCA Review. T. 11, Nr 4, 1950, s. 517.
- [4] Slade B. — Factors in the design of point contact transistors. R.C.A. Review. T. 14, Nr 1, 1953, s. 17.
- [5] Slade B. — The control of frequency response and stability of pointcontact transistors. PIRE. Vol. 40, Nr 11, 1952.
- [6] Valdes L. B. — Effect of electrode spacing on the equivalent base resistance of point-contact transistors. PIRE. Vol. 40, Nr 11, 1952.
- [7] Valdes L. B. — Transistor-forming effects in n-type germanium. PIRE. Vol. 40, Nr 4, 1952, s. 445—448.

WPLYW FORMOWANIA NA WSPÓLCZYNNIK α I OPORNOŚĆ r_k W TRANZYSTORZE PUNKTOWYM

J. PUŁTORAK i W. ROSIŃSKI

Omówiono wpływ formowania oraz innych czynników technologicznych na parametry elektryczne tranzystora.

*Влияние формования на коэффициент α и на сопротивление r_k
в точечном кристаллическом триоде*

Оговорено влияние формования и других технологических факторов на электрические параметры триода.

*The influence of forming upon the coefficient α and
the resistance r_k in point transistors*

The influence of forming and of other technological processes upon electrical parameters of transistors is discussed.

Badania przeprowadzone na tranzystorach (modele TP-1 i TP-2) serii prototypowej stwierdziły duży rozrzut wartości oporności wyjściowej r_k i współczynnika wzmocnienia prądowego α . Pomiarzy wykonane na tranzystorach doświadczalnych zestawianych na mikro-manipulatorze (rys. 1), po poddaniu ich

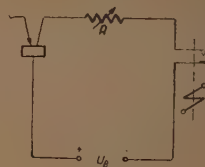


Rys. 1

procesowi formowania, wykazały decydujący wpływ tego procesu na wartość r_k i α .

Z dwóch podstawowych sposobów formowania styku wolfram-german (w kierunku przewodzenia) i styku fosforbrąz-german (w kierunku wstecznym) wyko-

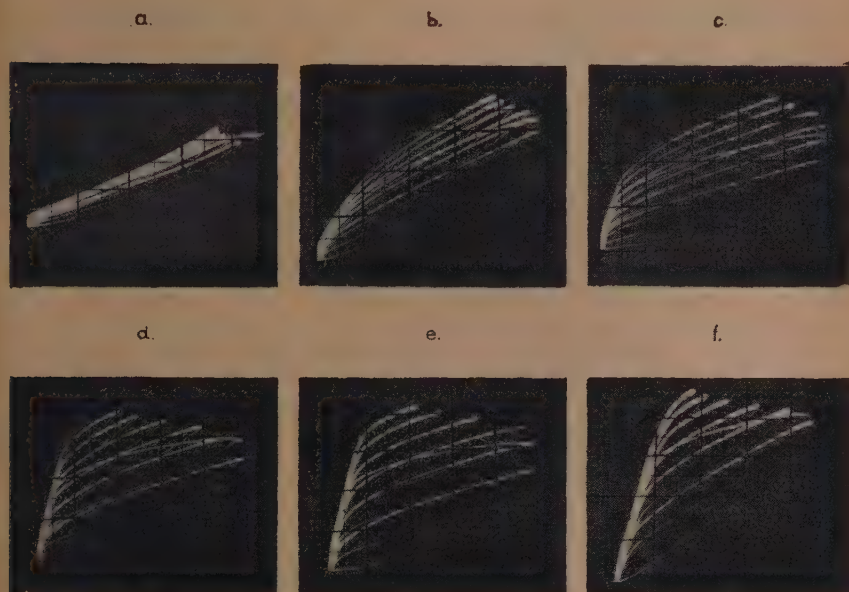
rzystano jedynie formowanie w kierunku wstecznym ze względu na to, że tylko ten sposób zapewnia wartość współczynnika α większą od jedności. Rys. 2 przedstawia schemat układu formowania ($U_B = 100$ V). Formowanie ostrzy wolfra-



Rys. 2

mowych w kierunku przewodzenia aczkolwiek daje duże wartości r_k , jest nie do przyjęcia ze względu na małe wartości α (zazwyczaj poniżej 0,2). Ponieważ parametr α odgrywa istotną rolę, od niego bowiem zależy w bardzo dużym stopniu wzmocnienie mocy, które jest proporcjonalne do α^2 oraz oporności wejściowej i wyjściowej, cała uwaga została skoncentrowana na opracowaniu metody formowania, umożliwiającej uzyskanie zadanej wartości α . W czasie badań stwierdzono, że cel ten można osiągnąć stosując sposób stopniowego, co najmniej trzykrotnego formowania coraz to więk-

szym prądem. Kolejne zmiany kształtu tranzystora, przedstawiono na rys. 3 charakterystyk, w miarę formowania (a. charakterystyka tranzystora nieformo-



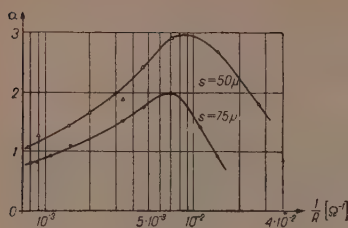
Rys. 3.

wanego; b, c, d. stadia przejściowe charakterystyk w czasie formowania; e. charakterystyka tranzystora uformowanego; f. charakterystyka tranzystora przeformowanego). Z charakterystyk tych wynika, że wzrostowi prądu formowania towarzyszy rozsuwanie się charakterystyk, a więc wzrost współczynnika α . Przy pewnej wartości prądu osiąga się α optymalne (rys. 3c), a dalsze doformowywanie, częstokroć nie zmieniając α , powoduje przesunięcie się charakterystyk w kierunku rosnących wartości prądu kolektora, co z punktu widzenia pracy tranzystora jest niepożądane (wzrost mocy traconej w kolektorze przy tym samym wzmocnieniu). Zaobserwowano równocześnie, że powtarzalność pomiarów zależy przede wszystkim od

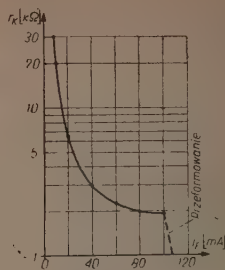
stanu powierzchni germanu. Przełom o doskonałej gładkości lub uzyskiwane przez cięcie i po tym doskonale polerowane powierzchnie dawały wyniki zupełnie powtarzalne zarówno co do kształtu charakterystyki, jak i wartości α i oporności r_k .

Powierzchnie o minimalnej chropowatości były przyczyną znacznych różnic kształtu charakterystyk oraz odpowiednich parametrów.

Oprócz wymagań co do gładkości powierzchni muszą być spełnione dodatkowe warunki: zastosowane ostrza powinny mieć możliwie podobne rozmiary, ponadto należy stosować podobne wartości nacisku, co sprawdza się najłatwiej przez pomiar oporności styku „ostrze-german“ w kierunku przewodzenia.



Rys. 4



Rys. 5

Na rys. 4 przedstawiono średnią zależność wartości współczynnika a od odwrotności oporności ograniczającej

prąd formowania w układzie formowania, a na rys. 5 zależność r_K od prądu formowania.

621.314.7

OTRZYMYWANIE ZŁĄCZ I TRANZYSTORÓW WARSTWOWYCH TYPU $p-n-p$

T. NIEMYJSKI i W. ROSIŃSKI

Podano uwagi odnośnie do otrzymywania złącz $p-n$ i tranzystorów warstwowych $p-n-p$ german-ind metodą stopowo-dyfuzyjną. Szkic tranzystora oraz jego charakterystyki pokazano na rysunkach.

Получение соединений и кристаллических триодов с переходом типа $p-n-p$

Приведены замечания относящиеся к получению переходов $p-n$ и кристаллических триодов с переходом типа $p-n-p$ германий-индий, по методу диффузионной сплавки. Эскиз триода и его характеристики указаны на рисунках.

The obtaining of junctions and of barrier-layer transistors of the $p-n-p$ type

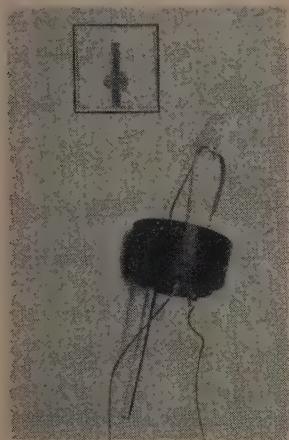
Some remarks concerning the obtaining of $p-n$ junctions and $p-n-p$ junction - transistors by the alloy-diffusion method are given. Design details of the transistor and its characteristics are presented.

Przy wyrobie tranzystorów warstwowych stosuje się na ogół jedną z dwóch zasadniczych metod. Jedna metoda polega na otrzymywaniu kryształu półprzewodnika przez wyciąganie monokryształu z roztworu raz z przewagą domieszek akceptorowych, raz z przewagą domieszek donorowych; druga polega na wpro-

wadzeniu do monokryształu, o określonym przewodnictwie, domieszek zmieniających lokalnie przewodnictwo monokryształu. Domieszki te wprowadza się na drodze stopowo-dyfuzyjnej. W Zakładzie Elektroniki I. P. P. T. — P. A. N. zastosowano tę ostatnią metodę. Wstępnym etapem przy otrzymaniu tranzystora war-

stwowego jest wytworzenie odpowiedniego złącza $p-n$. Materiałem wyjściowym był german typu n , a domieszką akceptorową — ind. Pierwsze egzemplarze złącz otrzymano na płytkach monokrystalicznego germanu, których powierzchnia była uprzednio szlifowana i trawiona. Na płytkę nakładano kulkę indu o średnicy 0,3 do 0,5 mm. Płytki z nałożonym indem umieszczano w tyglu tantalowym w wysokiej próżni. Tygiel podgrzewano indukcyjnie do temperatury około 500°. Zauważono znaczny wpływ procesu termicznego i obróbki chemicznej na charakterystykę diodową złącza. Wszystkie operacje przygotowawcze i końcowe przeprowadzono przy zachowaniu dużej czystości.

Tranzystor warstwowy otrzymano przez wykonanie złącz $p-n$ umieszczonych naprzeciw siebie po obu stronach płytki germanowej o grubości poniżej 200μ (rys. 1. — w ramce powiększony



Rys. 1

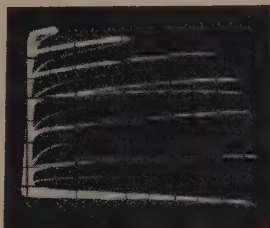
widok płytki z boku). Pierwsze tranzystory otrzymano przez jednoczesną nałożenie na obie strony płytki kulek indowych i poddanie próbki obróbce termicznej w próżni w podobnych warunkach. W jakich otrzymuje się złącze $p-n$. Rys. 2 i 3 ilustrują charakterystykę diodową

kołektora oraz rodzinę charakterystyk $U_k=f(I_k)$ pierwszego egzemplarza otrzymanego tą metodą.



Rys. 2

Przygotowanie próbki przed obróbką termiczną wykonano w sposób podobny, w jaki przygotowano płytki germanu przy wykonywaniu pojedynczych złącz $p-n$. Tak przygotowaną próbkę poddano obróbce termicznej w próżni. Zauważono również wpływ przebiegu procesu termicznego w czasie na podstawowe parametry tranzystora. Tygiel grafitowy, w którym umieszczono próbkę, grzany był indukcyjnie. Możliwie równomierny rozkład temperatury osiągnięto dzięki odpowiednim kształtom tygla i pewnej jego bezwładności cieplnej.



Rys. 3

Temperaturę mierzono za pomocą termopar miedź-konstantan i miedź-nikiel. Stwierdzono, że jeśli przy obróbce termicznej nie stosuje się atmosfery obojętnej, stan próżni powinien być przynajmniej taki, aby ind nie ulegał utlenianiu. Potwierdzono wpływ trawienia po obróbce termicznej na parametry tranzystora

oraz konieczność zachowania podczas wszystkich procesów bardzo dużej czystości. Zanieczyszczenia powierzchniowe wpływają ujemnie na podstawowe parametry tranzystora i charakterystyki diodowe złącz.

Uzyskano również pozytywne rezultaty z płytkami germanowymi, które cięte były z kawałka germanu polikryształicznego, składającego się z dużych kryształów. Po wycięciu płytki, przeszlifowaniu jej i odpowiednim wytrawieniu można uzyskać rozróżnienie poszczególnych ziarn kryształów (na przykład dzięki niejednakowemu odbijaniu światła naturalnego przez te kryształki). Małe kulki indowe umieszczono na poszczególnych powierzchniach tych kryształów.

Prace mające na celu ustalenie danych odnośnie do otrzymywania tranzystorów warstwowych są kontynuowane.

621.314.6:669.783

WPŁYW OCZYSZCZANIA STREFOWEGO GERMANU NA NAPIĘCIE WSTECZNE UKŁADU STYKOWEGO GERMAN-WOLFRAM

Z. MAJEWSKI, A. BROCHOCKI i J. KLAMKA

Podano opis aparatury laboratoryjnej do otrzymywania germanu o najwyższej czystości. Zbadano zależność napięcia wstecznego od wartości uzyskiwanej oporności właściwej germanu w układzie o styku ostrzowym, zestawianym i formowanym zwykłymi metodami stosowanymi w technologii diod germanowych.

Влияние зонной очистки германия на обратное напряжение системы контакта германий - вольфрам.

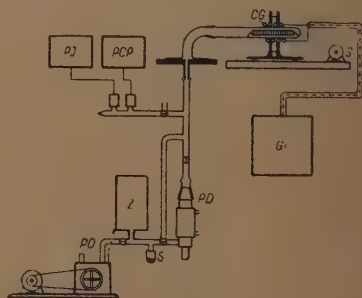
Описана лабораторная аппаратура, при помощи которой получается германий самой высокой чистоты. Испытана зависимость обратного напряжения от удельного сопротивления германия в системе точечного контакта, изготовленного и формированного обыкновенными методами применяемыми в технологии германиевых диод.

The influence of the zone melting of germanium upon the inverse voltage of the germanium - tungsten contact system

A laboratory apparatus designed for obtaining germanium of highest purity is described. The dependence of the inverse voltage upon the specific resistivity of germanium in point contact diodes, formed by usual technological methods is investigated.

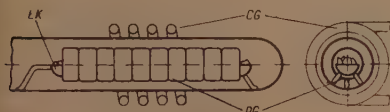
Celem pracy było opanowanie oczyszczania germanu oraz sprawdzenie wpływu uzyskanej czystości, mierzonej metodą elektryczną, na właściwości prostownicze układów o styku ostrzowym german-wolfram.

Zastosowano metodę oczyszczania strefowego. Schemat laboratoryjny aparatury próżniowej przedstawiono na rys. 1. Z typową częścią pompową urządzenia, składającą się z pompy obrotowej PO, zbiornika próżni Z, suszki S, pompy dyfuzyjnej PD z dwoma próżniomierzami:



Rys. 1

ciepłoprzewodnościowym PCP i jarzeniowym PJ, jest połączona za pomocą szlifu płaskiego rura o średnicy 30 mm, wykonana ze szkła twardego lub kwarcu w kształcie litery L. W poziomej części rury, połączonej z częścią zgiętą za pomocą szlifu stożkowego, umieszcza się łódeczkę kwarcową ŁK o średnicy wewnętrznej 8 mm i długości 100 mm. Łódeczkę po napełnieniu germanem otacza się pierścieniami grafitowymi PG o średnicy wewnętrznej około 10 mm. Na rys. 2

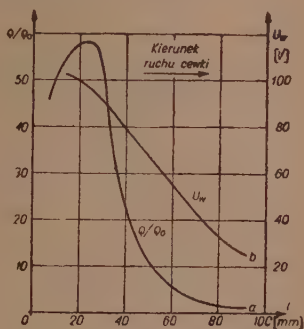


Rys. 2

przedstawiono widok części rury z umieszczoną w jej wnętrzu łódeczką i pierścieniami grafitowymi. Na zewnątrz rury znajduje się cewka grzejna CG generatora indukcyjnego GI, która może być przesuwana za pomocą silnika S o odpowiedniej przekładni z prędkością 5 cm/godz.

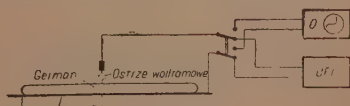
Proces oczyszczania strefowego przebiega w sposób następujący. Po włożeniu germanu do łódki i umieszczeniu jej wraz z pierścieniami grafitowymi w rurze kanału próżniowego odpompowuje się urządzenie, a następnie przeprowadza się dokładne odgazowanie germanu w temperaturze nieco niższej od jego temperatury topnienia, aż do uzyskania ciśnienia rzędu 10^{-4} Tr. Zarówno odgazowanie, jak i następnie topienie germanu osiąga się za pomocą ogrzewania indukcyjnego pierścieni grafitowych. Po odgazowaniu zwiększa się moc grzejną aż do uzyskania stopienia germanu, po czym rozpoczyna się przesuwanie cewki z podaną wyżej prędkością poczynając od jednego z końców łódki. Ruch cewki powoduje przesuwanie się strefy obejmującej fazę ciekłą germanu, w związku zaś z różnicą rozpuszczalności zanieczyszczeń w fazie ciekłej i stałej germanu te za-

nieczyszczenia, których rozpuszczalność jest większa w fazie ciekłej, przesuwają się w kierunku ruchu cewki i gromadzą się przy końcu pałeczki germanowej. Po dojściu do końca topionej pałeczki cewkę przesuwają się szybko do położenia początkowego, a następnie powtarza się powolne przesuwanie w tym samym co poprzednio kierunku. W wyniku opisanego procesu otrzymano po czterokrotnych przesunięciach pałeczkę germanową o długości około 80 mm. Przebieg oporności wzdłuż otrzymanej pałeczki mierzono metodą kompensacyjną za pomocą czterech ostrzy. Wykres oporności przedstawiono krzywą a na rys. 3.



Rys. 8

Następnie wykonano układ stykowy przedstawiony schematycznie na rys. 4.



Rys. 4

Z jednej strony przylutowano wzdłuż tworzącej pałeczkę germanową do płytki mosiężnej, z drugiej strony zeszlifowano ją nieco i wytrawiono w zwykły sposób stosowany przy produkcji diod germanowych. Punkty styku przesuвано wzdłuż pałeczki stosując każdorazowo nowe ostrze. Zestawiono styk oraz przeprowadzono formowanie prądowe za pomocą

urządzenia impulsowego UFI w warunkach optymalnych, ustalonych uprzednio przy opracowywaniu prototypu diod ostrzowych DK 10 i DK 11. Charakterystyki prostowania obserwowano na oscyloskopie O (rys. 4). Na tej podstawie otrzymano średnią krzywą napięcia wstecznego (rys. 3, krzywa b), z której wynika, że wartość tego napięcia w układzie stykowym german-wolfram zależy jednoznacznie od czystości półprzewodnika, jeżeli tylko inne parametry zestawienia pozostają stałe.

Diody wykonane z germanu otrzymanego metodą oczyszczania strefowego

wykazują napięcie wsteczne przekraczające 100 V.

Jest rzeczą interesującą, że przebieg krzywej oporności wstecznej przy niewielkim napięciu (rzędu kilku woltów) nie pokrywa się z przebiegiem krzywej napięcia wstecznego, lecz zdaje się wskazywać na istnienie maksimum. Jeżeli dalsze badania w tym kierunku potwierdzą wstępne wyniki, będzie to stanowić wskazówkę dla projektowania diod ze względu bądź to na duże napięcie wsteczne, bądź na dużą oporność wsteczną.

621.314:6:669.783

OTRZYMYWANIE ZŁĄCZ WARSTWOWYCH GERMAN-IND O WŁAŚCIWOŚCIACH PROSTOWNICZYCH

A. BROCHOCKI, J. KLAMKA, Z. MAJEWSKI

Opisano metodę technologii złączy german-ind do celów prostowania małej mocy. Podano niektóre właściwości pierwszych diod warstwowych uzyskanych tą metodą.

Получение переходов германий-индий с выпрямительными свойствами.

Описан метод технологии переходов германий-индий для целей выпрямления малой мощности. Приведены некоторые свойства первых диодов полученных при помощи этого метода.

Technology of germanium - indium rectifying junctions

The paper presents a technological method of producing germanium - indium junctions for rectifying purposes. Some properties of first junction diodes obtained by that method are given.

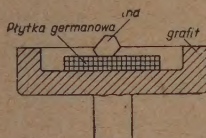
W związku z pracami nad złączami warstwowymi p-n o właściwościach prostowniczych przeeksperymentowano kilka metod. Dobre wyniki otrzymano za pomocą opisanej niżej metody stopowodyfuzyjnej z półprzewodnikiem podstawowym germanem o przewodnictwie typu n i pierwiastkiem akceptorowym — indem.

German o oporności właściwej rzędu dziesiątych części omo-centymetra pod-

dawano uprzednio oczyszczaniu strefowemu, uzyskując w ten sposób półprzewodnik o oporności właściwej rzędu kilkunastu omo-centymetrów. Ind otrzymano metodą elektrolityczną ze spektralnie czystego czterochlorku indu, a następnie przetapiano go w atmosferze wodoru.

Metoda polega na grzaniu indukcyjnym w próżni miseczki grafitowej, na której spoczywa płytka germanowa

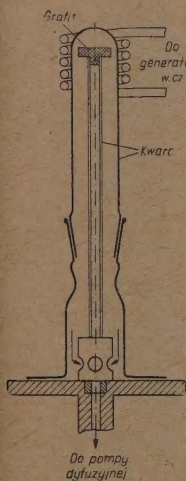
z przytapianym indem (rys. 1). Płytkę germanową jest uprzednio wytrawiana starannie zwykłym sposobem, stosowa-



Rys. 1

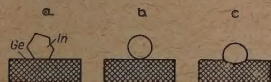
nym w technologii diod ostrzowych; po nałożeniu ziarenka indu całość umieszcza się pod kloszem próżniowym (rys. 2). Po

uzyskaniu odpowiedniej próżni rozpoczyna się ogrzewanie indukcyjne płytki grafitowej przy powolnym zwiększaniu temperatury. Początkowo ind topi się (155°C) tworząc kulkę na powierzchni germanu, a przy dalszym wzroście temperatury topiony ind daje lokalny stop z germanem, co przejawia się zmianą kształtu kulistej kropli indu na kształt soczewkowaty (rys. 3). Podczas chłodzenia german częściowo rekrytalizuje ze stopu,



Rys. 2

tworząc obszar o przewodnictwie typu p. Na granicy macierzystego oraz rekrytalizowanego germanu powstaje obszar

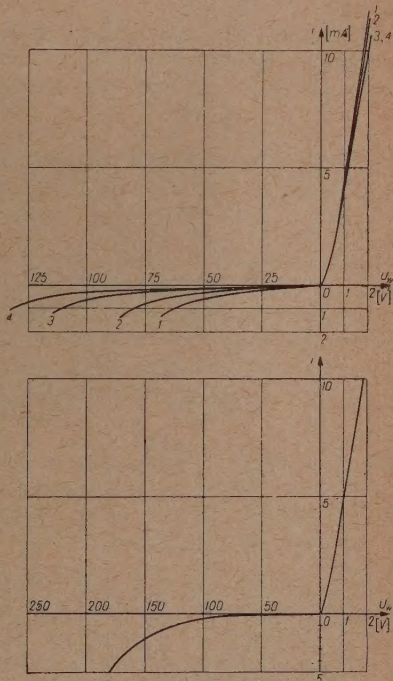


Rys. 3

przejściowy p-n o właściwościach prostowniczych. Proces stopowo-dyfuzyjny

trwa około 15 min. przy maksymalnej temperaturze nie przekraczającej 500°C .

Powyższą metodą otrzymano złącza mające charakterystyki prądowo-napięciowe pokazane na rys. 4. Rys. 4a przed-



Rys. 4

stawia charakterystyki złącz wykonanych z germanu o coraz to większych wartościach oporności właściwej. Z typowej charakterystyki (rys. 4b) wynika, że stabilne działanie złącza w kierunku wstecznym sięga do wartości prądu wstecznego 5 mA, co odpowiada maksymalnemu napięciu wstecznemu 180 V. Można więc przyjąć, że nominalne napięcie wsteczne wynosi tu co najmniej 150 V.

Szereg prób przeprowadzonych ostatnio pozwala przypuszczać, że obecnie uzyskane wartości napięcia wstecznego zostaną wkrótce wydatnie przekroczone.

ERRATA

zeszyt 1—Tom IV—1955

L.p.	str.	Wiersz		jest	powinno być
		od dołu	od góry		
1	20	wzór 5		$=\max_{t \in T}$	$=\max_{t \in T}$
2	25	12	—	$U_0(t)$	$u_0(t)$
3	52	rys. 12		Liczby na osi $\frac{B_i}{B_w}$ podzielić przez 10	
4	58	3	—	rys. 8	rys. 10
5	80	7	—	B	B_1
6	98	rys. 20c		$-V$ (trzykrotnie)	$-V'$ (trzykrotnie)
7	106	—	7	$2n$	2η
8	111	26	—	γ'	α
9	119	1	—	M^2	M
10	132	rys. 36		Wykres powinien być na str. 136 jako rys. 38	
11	136	rys. 38		Wykres powinien być na str. 132 jako rys. 36	
12	141	—	16	odległość	długość
13	141	wzór 213		$= (r_1^2 - r_3^2 - D_{13}^2)^2 - 4 D_{13}^2 r_1^2$	$= (r_1^2 - r_3^2 - D_{13}^2)^2 - 4 D_{13}^2 r_3^2$
14	172	—	14	$\Sigma \Delta P_c$	ΔP_c
15	186	18	—	$-(\varrho + \mu)(\varrho - \varphi) \Delta \tau_1$	$-(\varphi + \mu)(\varrho - \varphi) \Delta \tau_1$
16	186	17	—	$-(\varrho + \mu)$	$-(\varphi + \mu)$
17	186	16	—	$(\varphi - \mu)$	$(\varrho - \mu)$
18	193	—	15	$ i \leq 3^0_{00}$	$ i \leq 3^0_{00}$
19	193	—	16	$ i \leq 6^0_{00}$	$ i \leq 6^0_{00}$
20	193	—	17	$ i \leq 9^0_{00}$	$ i \leq 9^0_{00}$
21	193	—	18	$ i \leq 12^0_{00}$	$ i \leq 12^0_{00}$
22	196	1	—	$-\mu(\tau_p - \tau_\varrho)^\delta$	$-\mu(\tau_p - \tau_p)$
23	202	6	—	$\mu = \frac{241}{177} = 136$	$\mu = \frac{241}{171} = 1,36$
24	207	4	—	$\alpha < 1$	$\alpha > 1$
25	208	10	—	коэффициента	коэффициента с
26	208	7	—	... и в кв.	... N в кв.

WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim, francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem, o ile możliwości, terminologii w języku rosyjskim oraz w języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swej pracy.

U w a g a: Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki“, Warszawa, Koszykowa 75, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN, tel. 8.32.04.

Cena zł 15,—